Digitized by Google

RADCLIFFE
OBSERVATORY
OXFORD.

BODLEIAN LIBRARY
OXFORD

Digitized by Google

Digitized by Google

Riquet e 116

J. P. Bryant
Oct. 14. 1809

Digitized by Google

Digitized by Google

PRINCIPES D'HYDRAULIQUE.

TOME PREMIER.

Digitized by Google

Les deux volumes se vendent 12 livres brochés,

A PARIS,

Chez THEOPHILE FARROIS le jeune, Libraire, Quai des Augustins, N°. 18.

Digitized by Google

PRINCIPES D'HYDRAULIQUE,

VÉRIFIÉS

Par un grand nombre d'Expériences faites par ordre du Gouvernement.

OUVRAGE dans lequel on traite du mouvement uniforme & varié de l'eau dans les Rivières, les Canaux, & les Tuyaux de conduite; de l'origine des Fleuves, & de l'établissement de leur lit; de l'effet des Ecluses, des Ponts & des Reversoirs; des Jets-d'eau; de la Navigation tant sur les Rivières que dans des Canaux étroits; de la résistance des Fluides en général; & de celle de l'Air & de l'Eau en particulier.

Par M. le Chevalier DU BUAT, ancien Chevalier de l'Ordre de Saint Jean de Jérusalem, Chevalier de l'Ordre Royal & Militaire de Saint Louis, Lieutenant-Colonel au Corps Royal du Génie.

Ut tandem Philosophia & Scientiæ solidis experientiæ nitantur fundamentis. (BACON.)

NOUVELLE ÉDITION, revue, & considérablement augmentée.

TOME PREMIER.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE MONSIEUR.

M. DCC. LXXXVI.

Digitized by Google

BODLEIAN
30 JAN 1935
LIBRARY

RADCLIFFE
OBSERVATORY
OXFORD.

Digitized by Google

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

LE principe de toutes les connoiſſances eſt dans l'entendement humain; & l'eſprit de l'homme, en qualité d'être actif, développe ce germe précieux, & en dirige l'énergie vers les objets qui flattent ſes deſirs, ou qui peuvent ſatisfaire ſes beſoins. Nous raiſonnons toujours juſte, quand nous n'appliquons à un ſujet que les idées qui ſont puiſées dans la nature de la choſe; mais on donne au contraire dans toutes ſortes d'erreurs, quand on ſe préoccupe, en voulant conclure avant de raiſonner, raiſonner avant de connoître, & connoître avant d'avoir examiné. Plus l'objet de nos recherches eſt ſimple en lui-même, plus notre eſprit en ſaiſit aiſément les rapports, & s'élève, d'une vérité à une autre, juſqu'à celles qui paroiſſent les plus abſtraites : auſſi avons-nous fait de grands progrès dans la Géométrie & dans les autres Sciences purement intellectuelles, parce qu'elles

Digitized by Google

ſont fondées ſur des hypothèſes ſimples, & qu'on n'y conſidère que les propriétés de l'étendue abſtraite : mais quand l'objet eſt matériel, & que, ne connoiſſant ni la groſſeur ni la forme de ſes parties élémentaires, ni les lois que l'Auteur de la nature leur a impoſées, nous voulons néanmoins prévoir les effets, calculer les efforts, diriger l'action; la nature alors ſe montre indépendante à notre égard, & toujours fidèle à la loi qui lui eſt preſcrite, & que nous ignorons, elle contrarie nos vues, déconcerte nos projets, rend inutiles nos efforts.

Vouloir connoître à fond la nature des élémens, eſt une prétention vaine, parce que nos organes ſont trop groſſiers pour cela : ſuppoſer des maſſes & des formes à ſon gré, c'eſt faire un ſyſtême qui ne peut ſervir de fondement à aucune ſcience ; mais interroger la nature, étudier les lois qu'elle s'eſt preſcrites, la prendre ſur le fait, lui dérober ſon ſecret, c'eſt le ſeul moyen de la maîtriſer, & la vraie marche de tout eſprit raiſonnable.

Ainſi, quand Képler eut découvert la

Digitized by Google

loi de la révolution des planètes, Galilée celle de la pesanteur, Pascal celle du poids de l'atmosphère, Newton celle de l'attraction & des routes de la lumière, on vit naître de ces découvertes l'Astronomie, la Chymie, la Physique, la Ballistique, la Mécanique & l'Optique; & toutes les fois que l'homme a pu développer une loi de la nature, inconnue jusques-là, il a toujours posé la base d'une science nouvelle, qui nous a appris à appliquer à notre usage des êtres auparavant rebelles, & à soumettre à nos volontés les élémens les plus indépendans. S'il reste au contraire plusieurs effets naturels, dont la marche nous paroît bizarre, & dont le résultat se dérobe à nos calculs, c'est que nous ignorons le principe général dont ils dépendent, la règle qui les gouverne, le ressort secret qui les produit.

Tels sont en général plusieurs phénomènes que les fluides nous présentent; & tel est en particulier le mouvement de l'eau dans un lit quelconque. On sait que jusqu'à présent nos connoissances en Hydraulique sont extrêmement bornées; car

Digitized by Google

quoique de grands génies s'y ſoient appliqués en différens tems, nous ſommes encore, depuis tant de ſiècles, dans une ignorance preſque abſolue des vraies lois auxquelles le mouvement de l'eau eſt aſſujetti : à peine, depuis cent cinquante ans, a-t-on découvert, à l'aide de l'expérience, quelle eſt la durée, la quantité & la viteſſe de l'écoulement de l'eau par un orifice quelconque. Tout ce qui concerne le cours uniforme des eaux qui arroſent la ſurface de la terre, nous eſt inconnu; & pour ſe faire une idée du peu que nous ſavons, il ſuffit de jeter un coup-d'œil ſur ce que nous ignorons. Faut-il apprécier la viteſſe d'un fleuve dont on connoît la largeur, la profondeur & la pente; déterminer à quelle hauteur il élèvera ſes eaux, s'il vient à recevoir un autre fleuve dans ſon lit; prévoir de combien il baiſſera ſi on lui fait une ſaignée; fixer la pente qui convient à un aqueduc, pour conſerver à ſes eaux une viteſſe donnée, ou la capacité du lit qui lui convient pour amener dans une ville, avec une pente donnée, une quantité d'eau qui ſuffiſe à ſes beſoins; tracer les

Digitized by Google

contours d'une rivière, de telle ſorte qu'elle ne travaille point à changer le lit dans lequel on l'a renfermée; prévoir l'effet d'un redreſſement, d'une coupure, d'un reverſoir; calculer la dépenſe d'un tuyau de conduite, dont la longueur, le diamètre & la charge ſont données; déterminer de combien un pont, une retenue, une vanne feront hauſſer les eaux d'une rivière; marquer juſqu'à quelle diſtance ce remou ſera ſenſible, & prévoir ſi le pays n'en deviendra pas ſujet aux inondations; calculer la longueur & les dimenſions d'un canal deſtiné à deſſécher des marais perdus depuis long-tems pour l'agriculture; aſſigner la forme la plus convenable aux entrées des canaux, aux confluens ou aux embouchures des rivières; déterminer la figure la plus avantageuſe à donner aux vaiſſeaux ou aux bateaux, pour fendre l'eau avec le moindre effort; calculer en particulier la force néceſſaire pour mouvoir un corps qui flotte ſur l'eau; toutes ces queſtions, & une infinité d'autres du même genre ſont encore inſolubles : le croiroit-on? On ignore

Digitized by Google

presque encore à quoi est égal le choc de l'eau, quand elle frappe directement un plan; à plus forte raison, quand elle se ment contre des surfaces convexes de toute espèce.

Tout le monde raisonne sur l'Hydraulique; mais il est peu de personnes qui l'entendent : cependant chaque royaume, chaque province, chaque ville a ses besoins en ce genre; la nécessité, la commodité, le luxe ne peuvent se passer du secours de l'eau; il faut la conduire au centre de nos habitations, nous garantir de ses ravages, lui faire mouvoir des machines qui soulagent notre foiblesse, décorer nos demeures, embellir & nettoyer nos villes, augmenter ou conserver nos domaines, transporter de province à province, ou d'un bout du monde à l'autre, tout ce que le besoin, la délicatesse ou le luxe ont rendu précieux aux hommes; il faut contenir de grands fleuves, changer le lit des rivières, creuser des canaux, bâtir des aqueducs. Qu'arrive-t-il? Faute de principes, on adopte des projets dont la dépense n'est que trop réelle, mais dont le succès est

Digitized by Google

chimérique ; on exécute des travaux dont l'objet ſe trouve manqué ; on conſtitue l'Etat, les Provinces, les Communautés en des frais conſidérables, ſans fruit, ſouvent même à leur préjudice; ou du moins il n'y a point de proportion entre la dépenſe & les avantages qui en réſultent.

La cauſe d'un ſi grand mal, je le répète, eſt l'incertitude des principes, la fauſſeté de la théorie que l'expérience dément, le peu d'obſervations faites juſqu'à préſent, & la difficulté de les bien faire. On a fait, à la vérité, quelques expériences ſur le mouvement de l'eau, à la ſortie des orifices; & on en a déduit une théorie qui émane de celle de la chûte des graves, & des règles que ſuit la preſſion des fluides. Juſques-là la marche eſt aſſurée. L'Hydroſtatique en effet eſt fondée ſur des principes fort ſimples, qui rendent raiſon des lois que ſuivent les fluides dans l'état de repos, en vertu de deux propriétés, la peſanteur & la fluidité, qui agiſſent ſeules dans ce cas. Mais ſur quel raiſonnement peut-on fonder l'application des formules de l'Hydroſtatique au cours uniforme d'un fleuve, qui ne peut

Digitized by Google

devoir la viteſſe avec laquelle il ſe meut, qu'à la *pente de ſon lit priſe à la ſurface du courant*, à ſa largeur & à ſa profondeur ? Il eſt vrai que, dans les deux cas, la gravité eſt la cauſe générale du mouvement; mais dans les eaux courantes, il eſt une loi qui modifie ce principe, loi dont la découverte doit ſervir de baſe à l'Hydraulique, & faire rejeter toute théorie fondée ſur des hypothèſes imaginaires, qui ne peuvent conduire qu'à des conſéquences abſurdes.

Quand on eut découvert par l'expérience que la viteſſe de l'eau qui ſort d'un vaſe par un orifice eſt proportionnelle à la racine quarrée de la charge, on s'occupa d'abord à vérifier ce fait aſſez ſurprenant; & par une étrange mépriſe, on voulut appliquer ce principe à toute eſpèce de mouvement des eaux. Varignon, Mariotte, Guglielmini, & tous les autres en font la baſe de l'Hydraulique. Ce dernier calcule par la parabole la viteſſe des filets d'une rivière à différentes profondeurs, & la ſuppoſe nulle à la ſurface, plus grande au milieu, & la plus grande au fond. C'eſt d'après cette hypothèſe qu'il aſſigne la dépenſe du Da-

Digitized by Google

nube dans ſon Traité des Eaux courantes : il étoit cependant trop bon obſervateur, ainſi que Mariotte, pour ne pas s'appercevoir que, dans les tuyaux de conduite & dans le lit des rivières, le frottement de l'eau contre les parois altère & dénature entièrement l'ordre des viteſſes d'un orifice. Mariotte a fait à cet égard quantité d'expériences utiles; mais il n'en déduit aucune règle générale.

Guglielmini cependant rectifia enſuite ſes premières idées, d'après un grand nombre d'obſervations qu'il fit ſur le cours des rivières. On voit dans ſon ouvrage de la Nature des Fleuves, qu'il s'eſt bien apperçu que la réſiſtance du fond retarde conſidérablement la viteſſe; &, ſelon lui, la viſcoſité de l'eau procure aux molécules ſupérieures plus de viteſſe qu'elles n'en devroient avoir, ſuivant la loi parabolique : il obſerve que la viteſſe moyenne eſt ſouvent au milieu de la profondeur; que les obſtacles multipliés font perdre la viteſſe acquiſe par la chûte; que la pente alors diminue, & qu'elle peut devenir très-petite; il trouve que vers le bas de ſon cours,

Digitized by Google

le Reno n'eſt incliné que de 50 ſecondes, ce qui revient à une pente moindre que $\frac{1}{4000}$; mais il penſe que l'eau, en augmentant de profondeur, acquiert par la preſſion la force de la chûte qu'elle avoit perdue; il n'a pas ignoré qu'il exiſte un rapport entre l'action du courant & la conſiſtance du lit; que les fleuves ont la force de ronger le fond, & de diminuer leur pente à la longue, quand leur viteſſe eſt trop grande; & qu'il y a un point d'équilibre entre cette force & la ténacité du ſol, qui s'établit naturellement par l'élargiſſement du lit.

Quant à l'intenſité du frottement de l'eau, nous venons de trouver, depuis la publication des Principes d'Hydraulique, que M. Pitot avoit poſé depuis long-tems un principe fondamental à cet égard. Parmi les Mémoires de l'Académie des Sciences, pour 1728, on en trouve un de cet Académicien, dans lequel, après avoir démontré qu'à meſure que les corps augmentent de volume, leurs ſurfaces croiſſent en moindre rapport, ou qu'en général le rapport des ſurfaces aux ſolidités eſt comme

Digitized by Google

l'inverſe des côtés homologues; il en fait l'application aux réſiſtances des corps ſemblables, qui ſe meuvent dans les fluides; & il conclud, en parlant du frottement de l'eau dans les tuyaux, qu'à viteſſes égales, il eſt, par rapport au volume d'eau, en raiſon inverſe des diamètres.

M. Couplet fit enſuite des expériences ſur les conduites d'eau de Verſailles, qui donnèrent une idée de la grande altération que le frottement occaſionne au cours de l'eau : ces expériences ne furent pas aſſez multipliées; d'ailleurs les moyens étoient trop imparfaits; auſſi la théorie qu'il en a voulu déduire, & celle que M. Belidor y a ſubſtituée, ne méritent aucune conſidération.

Telles étoient nos connoiſſances ſur le mouvement des eaux courantes, lorſque les plus grands Géomètres, MM. Daniel Bernoulli &d'Alembert ſoumirent ce mouvement aux recherches de l'analyſe la plus ſavante & la plus compliquée. Commençant par les cas les plus ſimples, ils ont examiné d'abord l'écoulement par des orifices, dans leſquels le frottement eſt le

Digitized by Google

moins ſenſible. Newton les avoit précédés dans cette recherche; mais la différence des réſultats a été la ſuite de celle des hypothèſes qu'ils avoient adoptées; & l'expérience n'a pas toujours avoué leurs principes. Ces efforts ont du moins ſervi à montrer la difficulté de ſoumettre à l'analyſe le mouvement des fluides; & l'on n'a pas même tenté d'en faire l'application au cours des rivières d'une certaine conſéquence. Enfin, M. l'Abbé Boſſut a ſenti la néceſſité de prendre l'expérience pour guide dans des recherches auſſi délicates; il a fait, avec une ſagacité digne de lui, & avec une exactitude étonnante, un grand nombre d'obſervations ſur le mouvement de l'eau qui coule par des orifices de différentes eſpèces, par des tuyaux de diamètres & de longueurs différens, & dans des canaux factices. C'étoit ſans doute le ſeul chemin qui pouvoit conduire à la vérité; & M. l'Abbé Boſſut a ouvert la carrière d'une manière ſi neuve & ſi judicieuſe, qu'il a, pour ainſi dire, le mérite de tous les efforts qui ont ſuccédé aux ſiens.

Perſonne ne peut nier que ſi deux fleuves

Digitized by Google

fleuves ont même profondeur, même largeur & même pente, & qu'ils coulent ſur un fond homogène, leurs viteſſes ne différeront en rien; mais ſi on vient à changer un ſeul de ces accidens, la viteſſe croîtra ou diminuera, ſans ceſſer néanmoins d'être uniforme. Juſqu'à préſent aucune théorie connue n'apprend à calculer la viteſſe, d'après ces données; or, la viteſſe étant inconnue, la dépenſe l'eſt auſſi; & par une ſuite néceſſaire, on ne peut prévoir le ſuccés d'aucune opération ſur le lit des fleuves, ni réſoudre un ſeul problême qui y ait rapport.

Frappé de l'ignorance où nous laiſſent nos meilleurs Auteurs ſur une matière auſſi importante, je dévorai la partie de l'Hydrodynamique de M. l'Abbé Boſſut, qui traite du mouvement des eaux, auſſitôt que cet ouvrage devint public; & j'y cherchai la ſolution du problême qui me paroiſſoit devoir être la clef de l'Hydraulique; c'eſt à dire, de déterminer quelle eſt la viteſſe d'un courant dont la pente & le lit ſont donnés: mais les expériences n'étoient point encore aſſez déciſives, ni

aſſez variées pour atteindre juſques-là : je ne ſais ſi l'ouvrage que je venois de parcourir me communiqua une portion de la ſagacité de ſon Auteur; mais je me mis à conſidérer que ſi l'eau étoit parfaitement fluide, & qu'elle coulât dans un lit infiniment poli, de la part duquel elle n'éprouvât aucune réſiſtance, elle accéléreroit ſon mouvement à la manière des corps qui gliſſent ſur des plans inclinés; car il eſt évident que la pente à la ſurface eſt la ſeule cauſe efficace qui engendre ſon mouvement, puiſque ſans elle le mouvement n'a pas lieu. Or, la viteſſe d'un fleuve ne s'accélère pas à l'infini : au contraire elle perſévère dans un degré aſſez borné, quand elle a atteint l'uniformité, & elle n'augmente plus enſuite ſans cauſe; d'où il ſuit qu'il exiſte quelque obſtacle qui détruit la force accélératrice, & l'empêche d'imprimer à l'eau de nouveaux degrés de viteſſe. Or, en quoi peut conſiſter cet obſtacle, ſinon dans le frottement que l'eau eſſuie de la part des parois du lit, & dans la viſcoſité du fluide? La viſcoſité ſeule peut donner lieu à deux eſpèces de réſiſtance;

Digitized by Google

l'une qui vient d'un mouvement inteſtin des parties du fluide, dont la mobilité eſt imparfaite, & l'autre de l'adhéſion naturelle que ces parties ont avec le lit dans lequel elles ſe meuvent.

Ces cauſes agiſſant enſemble, & venant à égaler la force accélératrice de l'eau courante, c'eſt-à-dire, ſa force relative pour deſcendre le long du plan incliné de ſon lit, la viteſſe ne peut plus augmenter, & elle devient uniforme. C'eſt donc un principe évident & certain tout-à-la-fois, que *quand l'eau coule uniformément dans un lit quelconque, la force accélératrice qui l'oblige à couler* eſt égale *à la ſomme des réſiſtances qu'elle eſſuie, ſoit par ſa propre viſcoſité, ſoit par le frottement du lit.* Cette loi me paroiſſoit auſſi ancienne que la création des fleuves, & devoir être la clef de l'Hydraulique : elle ſe préſente à l'eſprit d'une manière lumineuſe ; & elle eſt d'ailleurs la baſe fondamentale de tout mouvement uniforme.

Encouragé par cette découverte, & par la fécondité de ce principe dans les différentes applications qu'on en peut faire

Digitized by Google

à la pratique, & à la ſolution de quantité de beaux problêmes, je me perſuadai que le mouvement de l'eau dans un tuyau de conduite avoit une grande analogie avec le cours uniforme d'un lit de rivière, puiſque de part & d'autre la peſanteur étoit le moteur, & la réſiſtance du lit le modérateur. Je me ſervis donc, pour faire une formule du mouvement uniforme, des expériences de M. l'Abbé Boſſut ſur les tuyaux de conduite, & même de celles qu'il avoit faites ſur des canaux factices, quoiqu'il y manquât une donnée, qui étoit la profondeur du courant. C'eſt ainſi que je compoſai l'ouvrage que j'ai donné au Public, ſous le titre de Principes d'Hydraulique, en l'année 1779.

Je ſentois bien néanmoins qu'une théorie auſſi nouvelle, & qui conduiſoit à des réſultats tout-à-fait différens de la théorie ordinaire, avoit beſoin d'être appuyée ſur de nouvelles expériences, plus directes que les anciennes, ou d'un genre tout-à-fait différent; car j'avois été obligé de ſuppoſer que le frottement de l'eau ne dépendoit point de ſa preſſion, mais uniquement

Digitized by Google

de la ſurface frottée, & du quarré de la viteſſe. Je propoſois donc une marche à ſuivre dans ce qui me ſembloit manquer aux expériences faites juſqu'alors, & je n'abandonnois mon travail à la critique qu'avec une ſorte de crainte, qui cédoit néanmoins à une intime conviction de la certitude des principes que j'avois adoptés.

Mon manuſcrit fut accueilli avec un intérêt ſingulier par M. de Fourcroy, Directeur du Corps Royal du Génie, réſident près le Miniſtre de la Guerre : cet Officier général voulut bien m'aider & de ſes conſeils & de ſes ſoins, pour la publication & la perfection de cet ouvrage ; je ne puis non plus trop reconnoître les facilités que M. Le Sancquer, Commiſſaire Ordonnateur des Guerres, Chef des Bureaux de l'Artillerie & du Génie, m'a procurées pour le même objet. Les vrais citoyens aiment tant le bien public, qu'ils en embraſſeroient juſqu'à l'ombre. M. le Prince de Montbarrey, alors Miniſtre de la Guerre, voulut bien agréer que je lui dédiaſſe les Principes d'Hydraulique, & me fit l'honneur de les mettre ſous les

Digitized by Google

yeux du Roi. Sur le compte qui lui fut rendu par M. de Fourcroy de l'utilité des vues nouvelles que je préſentois, & de la néceſſité de nouvelles expériences pour vérifier les principes, le Miniſtre ordonna un fonds annuel, deſtiné à y être employé par mes ſoins. Ainſi, dès l'année 1780, & pendant les ſuivantes 1781, 1782, & 1783, je travaillai aſſiduement à ces expériences, étant ſecondé par MM. Dobenheim & Benezech de St. Honoré, Officiers au Corps Royal du Génie, dont le zele & la capacité ſont connus. Le dernier ſur-tout s'affectionna particulièrement à ce travail, & m'a été d'un ſi grand ſecours, que je puis dire qu'on lui doit la perfection à laquelle nous avons porté la théorie du mouvement de l'eau, & la formule qui le repréſente. La grande facilité avec laquelle il manie le calcul, a ſuppléé à ce qui me manquoit à cet égard; & il a embelli cet ouvrage de pluſieurs beaux problêmes, & de quantité de recherches importantes. C'eſt donc avec raiſon que je parle preſque toujours au plurier.

Nos nouvelles expériences devoient être

Digitized by Google

le complément de celles qu'on avoit faites jusqu'alors, sur-tout par rapport au mouvement uniforme. Or, on en manquoit principalement pour les cas extrêmes des lits très-petits, & des lits d'une grandeur approchante de ceux des rivières.

M. l'Abbé Bossut n'avoit donné, dans son Hydrodynamique, que des pentes médiocres à ses tuyaux de conduite; on manquoit d'observations sur les plus grandes pentes & sur les très-petites : nous nous sommes donc appliqués à suppléer, autant qu'il a été possible, à ce qu'on n'avoit pas fait jusqu'ici, sans négliger néanmoins de répéter plusieurs expériences, qui avoient une relation plus rapprochée avec celles qui étoient déja faites, afin de vérifier par là l'exactitude des unes & des autres, & sur-tout la précision de nos procédés. Ainsi nous avons employé des pentes depuis la plus grande de toutes, qui est la verticale, jusqu'à un quarante millième; & nous avons de même soumis à l'expérience, des lits, depuis une ligne & demie de diamètre jusqu'à sept ou huit toises quarrées de surface.

Digitized by Google

Les expériences qui nous ont donné plus de peine, ſont celles où nous avons employé un canal factice, qui avoit la forme d'un trapèze ou d'un rectangle, ſelon la manière dont on aſſembloit les madriers qui le compoſoient. Nous avons éprouvé de grandes difficultés à rendre uniforme le cours de l'eau dans ce canal, dont la longueur étoit bornée; mais nous avons été bien dédommagés de nos peines, par les expériences que nous avons eu occaſion d'y faire ſur la diminution des viteſſes d'un courant uniforme, à compter du milieu de la ſurface juſqu'au fond; par la recherche du rapport qui exiſte entre la viteſſe moyenne & celles de la ſurface & du fond; par des obſervations très-curieuſes ſur la manière dont l'eau travaille le fond de ſon lit; par la connoiſſance du degré de réſiſtance qu'oppoſent à l'eau des natures de terrain différentes, comme les galets, le gravier, le ſable & l'argile.

Nous n'avons pas borné là tout l'uſage que nous devions faire du canal factice: ayant la facilité de meſurer exactement les dépenſes dans tous les cas, nous avons

Digitized by Google

fait des reverſoirs de différentes eſpèces, des tenues & des ponts factices; & nous avons tenu compte des dépenſes & des remous qui en réſultoient.

Enfin, pour abréger un détail qui trouvera ſa place ailleurs, nous avons ſoumis à l'expérience, des tuyaux coudés de différentes manières, dont nous avons comparé les dépenſes & les charges à celles des tuyaux droits de même diamètre & de même longueur.

Jusques-là nous nous étions occupés du mouvement des eaux, uniforme ou varié; & c'étoit là le principal objet que nous avions en vue. La réſiſtance des fluides méritoit cependant bien que nous fiſſions quelques tentatives pour tirer au moins quelqu'une de ſes lois de l'obſcurité où la nature ſemble les avoir enveloppées. On trouve d'extrêmes difficultés à déterminer l'effort dont eſt capable un fluide dont la maſſe ſe meut, & rencontre une ſurface ou un corps ſolide qui l'oblige à ſe détourner. Pour y réuſſir, il faudroit connoître la loi ſuivant laquelle chaque molécule doit s'écarter de ſa première di-

Digitized by Google

rection, & la route qu'elle doit ſuivre pour éviter cette ſurface, pour la toucher quelquefois, & pour repaſſer enfin derrière, en reprenant la ſimplicité de ſon premier mouvement.

Suppoſer, comme on l'a fait juſqu'à préſent, que chaque particule élémentaire vienne frapper immédiatement à ſon tour la ſurface ou le corps, c'eſt ſuppoſer l'anéantiſſement des molécules après la percuſſion, & fonder la théorie ſur une hypothèſe chimérique. Or, les conſéquences des principes imaginaires ne peuvent jamais être vraies, & les formules analytiques qu'on en tire *ne peuvent pas peindre l'image ſenſible du mouvement actuel & phyſique d'un fluide*, pour me ſervir des termes de M. l'Abbé Boſſut. Ainſi elles n'offrent à l'eſprit que des fantômes, qui peuvent avoir l'air de la vérité, mais qui n'en peuvent jamais être le ſymbole.

C'eſt donc à l'expérience ſeule à nous éclairer ſur la direction du mouvement des particules inviſibles des fluides, d'où naiſſent leurs forces percuſſives; car puiſqu'il répugne au raiſonnement que chaque

Digitized by Google

partie frappe directement à ſon tour la ſurface oppoſée au mouvement général du fluide, il eſt peut-être vrai qu'aucune ne le fait; & cette ſuppoſition eſt bien plus probable que ſon oppoſée. De même ſi le choc a une énergie pour faire céder la ſurface, en la preſſant antérieurement, la fuite du fluide, à la partie poſtérieure, ne doit-elle pas occaſionner un défaut de preſſion, qui augmente la réſiſtance que doit faire la ſurface, pour reſter immobile? A quoi l'analyſe peut-elle ſervir? Quel principe peut-elle ſaiſir, pour s'étayer & ſe guider dans des recherches de cette nature?

Quoi qu'il en ſoit, c'eſt en vain qu'on s'efforce de trouver des rapports entre les réſiſtances qu'éprouvent différens corps, terminés par des ſurfaces planes ou courbes, ſi ces corps ne ſont pas ſemblables. Ainſi il faut comparer enſemble des plans ſans épaiſſeur, des cubes, des ſphères, des priſmes, des pyramides ſemblables; &, dans ce cas, on trouve toujours les réſiſtances proportionnelles aux ſurfaces choquées, & aux quarrés des viteſſes. De là

Digitized by Google

ſuit le moyen de connoître la réſiſtance des vaiſſeaux par une ſimple expérience en petit ſur un modèle ſemblable.

Toutes les expériences que nous nous étions propoſé de faire étant achevées, j'en rendis compte, le 31 Mars 1783, à M. le Maréchal de Ségur, Miniſtre de la Guerre, qui avoit bien voulu accorder la même protection & les mêmes ſecours à mon entrepriſe, par un Mémoire très-détaillé, que je donne preſque en entier dans la ſeconde partie de cet Ouvrage : ce Miniſtre l'adreſſa à MM. de l'Académie des Sciences, pour l'examiner & lui en rendre compte ; ce qu'ils firent d'une manière bien propre à m'encourager. Il falloit donner à ce travail une forme ſous laquelle il pût être rendu public; & mon deſſein avoit été d'abord de laiſſer ſubſiſter mon premier ouvrage des Principes d'Hydraulique, en y ajoutant un deuxième volume, qui auroit compris nos expériences, & la formule du mouvement uniforme de l'eau, perfectionnée d'après les obſervations. Cela m'avoit paru d'autant plus convenable, que l'expérience n'avoit démenti en rien mes

Digitized by Google

principes. Néanmoins, pour la commodité des lecteurs, & pour ne rien négliger de ce qui peut contribuer à rendre utile un travail fait par ordre & aux frais du Gouvernement, j'ai pris le parti de refondre entièrement mon premier ouvrage, & d'exposer d'une manière toute neuve les principes avoués par l'expérience, en faisant marcher de front la théorie & les observations. Par là les applications à la pratique, & la solution des problêmes intéressans que j'avois déja donnés en 1779, deviendront plus sensibles, plus satisfaisans, & plus à la portée du Public; & les nouveaux problêmes se lieront mieux avec la chaîne des vérités, qui pourroit échapper dans un discours décousu. Il me reste à donner en peu de mots le plan de cet ouvrage.

J'ai renfermé dans la première partie tout ce qui concerne le mouvement uniforme & varié des eaux courantes; dans la seconde, le détail de nos expériences en ce genre; & dans la troisième, ce que nos propres observations, combinées avec celles d'autrui, nous ont appris sur la

Digitized by Google

réſiſtance des fluides. Chacune de ces trois parties eſt diviſée en pluſieurs ſections, & chaque ſection en différens chapitres.

Après avoir donné une idée générale de la fluidité, j'examine les circonſtances du mouvement de l'eau, à la ſortie des réſervoirs, & ſur-tout l'effet de la déviation des filets d'eau, qui ſe préſentent ſous différentes directions, pour ſortir par un même orifice. Ce n'eſt pas que le mouvement des rivières ſoit ſemblable à celui-ci; mais la contraction ſe trouve à chaque pas dans la nature: elle affecte les conduites d'eau, dont elle diminue la dépenſe; les rivières, au paſſage des ponts & des écluſes; les canaux à leur entrée; les réverſoirs, les aqueducs; les fleuves mêmes à leur embouchure, quand le flux de la mer ſe préſente pour les refouler dans leur lit. Ainſi il étoit néceſſaire d'en donner une connoiſſance préliminaire.

J'entre enſuite dans le développement du principe fondamental du mouvement uniforme: c'eſt l'équilibre entre une puiſſance & une réſiſtance. La puiſſance eſt la peſanteur relative de la colonne fluide,

Digitized by Google

qui tend à ſe mouvoir ſur le plan incliné de ſon lit ; la réſiſtance eſt le frottement de ce lit, la viſcoſité du fluide, & ſon adhéſion aux parois. Je ſuppoſe d'abord la réſiſtance entière proportionnelle au quarré des viteſſes ; & de là ſuit la formule primitive du mouvement uniforme de l'eau dans un lit quelconque.

J'appelle enſuite l'expérience, & je lui confronte cette théorie. Mais pour corriger la dernière, il faut dépouiller l'un après l'autre les élémens variables, qui ſont la grandeur du lit, ſon périmètre & ſa pente; & examiner comment la viteſſe varie, ſelon que l'un de ces élémens eſt variable, tous les autres étant conſtans. Cette analyſe découvre pour quelle part le frottement, la viſcoſité du fluide & ſon adhéſion aux parois entrent chacun dans la réſiſtance totale. Chaque effet ſe trouve repréſenté par une expreſſion analytique convenable; la loi du mouvement ſe développe depuis des viteſſes infinies juſqu'à l'anéantiſſement du mouvement même : une ſeule formule la repréſente, & embraſſe tous les cas ; & la parfaite conformité des réſultats

Digitized by Google

du calcul avec ceux de l'expérience, aſſure & démontre la vérité des principes, & la juſteſſe de leur application.

Cette baſe poſée, je jette un coup-d'œil ſur la variété des lits où l'eau coule, ſoit naturellement, ſoit par l'effet de l'art, ſur les différentes viteſſes d'un même courant, ſur l'intenſité de la réſiſtance produite par l'inertie du lit, ſur la force que l'eau a pour creuſer & élargir ſa ſection; je tâche de remonter à l'origine de ces vaſtes décharges, de ces grands fleuves, qui, comme la tige vigoureuſe d'un arbre, ſe partagent en mille rameaux, qui couvrent la ſurface du globe, & ſervent autant à le deſſécher & le rendre habitable, qu'à le fertiliſer & l'embellir.

Un fleuve, conſidéré depuis ſa ſource juſqu'à la mer, eſt l'image des différens âges de l'homme: ſes commencemens ſont peu de choſe; il ſort de la terre, mais il tire ſon origine d'en haut: ſon enfance eſt capricieuſe & badine; il fait tourner un moulin, il ſe joue ſous les fleurs: ſa jeuneſſe eſt impétueuſe & bouillante; il choque, il deracine, il renverſe: le milieu de ſon

cours

Digitized by Google

cours eſt ſérieux & prudent; il ſe détourne, il cède aux circonſtances : dans ſa vieilleſſe il eſt meſuré dans ſes démarches, paiſible & majeſtueux, ennemi du bruit; il roule en paix ſes eaux tranquilles, & bientôt il ira s'abîmer dans l'immenſité des mers. Je tâche de le ſuivre dans ſa courſe; je développe ſes ſinuoſités; j'étudie ſon régime & la loi de ſa ſtabilité; je cherche la cauſe de ſes détours, & pour ainſi dire de ſes écarts.

L'étude des loix naturelles ſatisfait l'eſprit; mais elle a encore un but plus utile : elle nous montre le moyen d'aider la nature, d'accélérer ſes opérations, que notre impatience, ou la néceſſité trouve trop lentes; de maîtriſer les élémens, de les faire ſervir à nos beſoins. La théorie doit donc être appliquée à la pratique; & c'eſt ce que nous eſſayons de faire dans la troiſième ſection. Nous y examinons l'effet des accrues formées par la réunion permanente de pluſieurs rivières dans un même lit, ou d'une crue extraordinaire, qui gonfle les eaux d'un fleuve; l'effet des redreſſemens, qui deviennent quelquefois néceſſaires pour prévenir les débordemens; la dépenſe

Digitized by Google

d'un reverſoir ; la hauteur du remou qu'occaſionne une tenue ou un pont ; la diſtance où l'effet du remou ſe rend ſenſible au deſſus des écluſes par le refoulement des eaux ; la manière de calculer la hauteur de ce remou, à une diſtance quelconque d'une écluſe ; les moyens de rendre navigable une rivière, à laquelle trop peu d'eau, ou trop de pente ne permettent pas de porter bateau ou d'être flottable ; l'effet des ſaignées ; l'établiſſement des canaux de deſſéchement, des règles ſûres pour opérer un deſſéchement complet, avec le moins de dépenſe poſſible ; comment, & dans quel cas on peut doubler, tripler, &c. la dépenſe d'eau d'un canal de dérivation ; quelle eſt la forme qui convient le mieux aux entrées des canaux, aux piles des ponts, aux bajoyers des écluſes. Enfin, après avoir traité des obſtacles qui retardent l'écoulement de l'eau, comme les roſeaux, le vent, la glace, nous examinons pourquoi un corps qui flotte librement à la ſurface d'un courant, y acquiert une plus grande viteſſe que celle du fluide qui le porte ; & dans quel cas la ſurface d'un

Digitized by Google

courant eſt quelquefois convexe, & quelquefois concave.

Après avoir donné la principale attention aux rivières & aux canaux dont les ſervices ſont plus importans, ou les déſordres plus à craindre, nous nous occupons, dans la quatrième ſection, des aqueducs, des conduites & des jets-d'eau, qui ont plutôt pour objet la ſalubrité, la propreté ou l'agrément. On trouvera cette matière traitée avec la préciſion qui dérive de la netteté de la théorie. Cette ſection eſt terminée par la théorie du mouvement de l'eau dans les pompes; &, par occaſion, nous parlons de l'effet des machines à feu, de la force qu'il faut pour les mouvoir, & des effets des fluides élaſtiques.

La ſeconde partie contient le détail des expériences nombreuſes que nous avons faites ſur le mouvement uniforme & varié de l'eau. Non ſeulement il eſt juſte de faire part au Public du détail des obſervations ſur leſquelles eſt fondée notre théorie; mais on ſeroit en droit de douter de notre exactitude, de ſoupçonner même que l'eſprit de ſyſtême a pu nous ſéduire au point

Digitized by Google

de nous prévaloir de quelques expériences isolées ou infidèles, pour autoriser nos préjugés, & en imposer par l'air de la nouveauté, si nous ne rendions compte de nos procédés & des moyens qui nous ont conduit à chaque résultat. C'est ici la partie la plus importante de cet ouvrage; tout y appartient à la nature, & se trouvera vrai dans tous les tems, parce que les effets naturels ne dépendent pas des raisonnemens de l'homme, & qu'il ne faut que les bien observer. J'ai tâché de les exposer par ordre & avec clarté, pour inspirer la confiance, pour mettre le lecteur à même de juger si les expériences sont concluantes & décisives, & même pour qu'on puisse répéter & vérifier celles qui n'exigent pas un trop grand appareil. A la tête de chaque genre d'expériences on rend compte de la fin ou du but qu'on s'est proposé en les faisant, ensuite de la préparation avant de les faire, du résultat qu'elles ont donné, & enfin des réflexions qui en sont la suite. C'est le moyen d'en donner une parfaite connoissance.

La troisième & dernière partie est le

Digitized by Google

réſultat de nos eſſais ſur la réſiſtance des fluides : nous y conſidérons, dans deux ſections différentes, la réſiſtance de l'eau & celle de l'air, d'une manière abſolument neuve, en ne tenant aucun compte de l'ancienne théorie, que l'expérience a tant de fois déſavouée, & en cherchant de nouvelles vues dans des obſervations qui juſqu'à préſent n'avoient point été faites.

Il eſt étonnant que dans un ſiècle auſſi éclairé, on ſache ſi peu de choſes ſur la réſiſtance des fluides; & que tandis qu'on fait tous les jours uſage de l'eau & de l'air pour mouvoir nos machines, ou conduire nos vaiſſeaux, nous n'ayons pas, ou plus d'expériences, ſi la théorie eſt trop compliquée, ou plus de théorie, ſi elle doit être le fruit de l'expérience.

Quoi qu'il en ſoit, nous avons été aſſez heureux pour décompoſer la réſiſtance qu'un corps eſſuie pour ſe mouvoir dans un fluide, en deux efforts diſtincts, l'un qui s'exerce comme une preſſion en avant du corps, & l'autre comme un défaut de preſſion en arrière. Le premier eſt conſtant, ſi la grandeur & la forme du devant

Digitized by Google

du corps reſtent les mêmes. Le ſecond varie ſuivant la longueur du corps, & diminue toujours à meſure que cette longueur augmente, indépendamment de la forme de l'arrière du corps, qui fait auſſi varier cette non-preſſion. La ſomme de ces deux efforts eſt ſenſiblement proportionnelle aux quarrés des viteſſes, lorſqu'elles n'excèdent pas 3 à 4 pieds par ſeconde dans l'eau, & 20 à 24 pieds dans l'air : mais au-delà de ces limites, la non-preſſion augmente en plus grande raiſon que le quarré des viteſſes, tandis que la preſſion antérieure lui reſte proportionnelle. Un corps eſſuie moins de réſiſtance pour ſe mouvoir dans un fluide en repos, que pour réſiſter à l'effort d'un fluide qui ſe meut contre lui; la preſſion antérieure qui s'exerce contre un plan qui ſe meut dans un fluide, ou qui en reçoit le choc, n'eſt pas uniforme ſur tous les points de ſa ſurface; mais elle diminue conſtamment du milieu à la circonférence; & cet effet, qui paroît inconcevable, n'eſt qu'un corollaire d'un principe qui peut être regardé comme fondamental dans la réſiſtance des

Digitized by Google

fluides : c'eſt que la preſſion latérale d'un fluide qui ſe meut, eſt toujours égale à celle qu'il exerceroit s'il étoit en repos, moins celle qui eſt repréſentée par la hauteur due à la viteſſe avec laquelle il ſe meut.

Des expériences directes & bien vérifiées nous ont donné l'intenſité de la preſſion & de la non-preſſion, ou la ſomme des réſiſtances qu'eſſuient dans le fluide des ſurfaces planes, des cubes & des priſmes, en vertu du mouvement du fluide ou du corps. Les expériences de Newton donnent celle de la ſphère; mais cette nouvelle manière d'enviſager le choc eſt ſi étrangère à toute théorie, qu'on ne connoît plus de principe d'après lequel on puiſſe apprécier les réſiſtances obliques.

Un autre genre d'expériences ſemble donner quelques lumières ſur un ſi grand problême. Tout corps mu dans un fluide communique ſon mouvement à une certaine quantité de fluide qui eſt relative à la figure & au volume du corps : une partie de ce fluide eſt pouſſée par le corps en avant de lui; l'autre le ſuit par derrière.

Digitized by Google

La plus grande ſection du corps, à laquelle on rapporte communément le choc, eſt la baſe ſur laquelle ſemblent appuyés les volumes du fluide entraîné. Plus ces volumes ſeront grands, plus il ſemble que le fluide ſe dévie loin de ce plan de plus grande ſection; & plus le choc doit être petit. Ainſi, en joignant enſemble le volume du corps & celui du fluide entraîné, plus cette ſomme ſera grande en comparaiſon du plan de plus grande ſection, plus le choc ſera petit. Un ſimple plan ſans épaiſſeur entraînera donc le moins de fluide poſſible, & eſſuiera le plus grand choc. Un corps aigu, plus ou moins long, dont ce plan ſeroit la plus grande ſection, eſſuiera d'autant moins de réſiſtance qu'il ſera plus long; & il en ſera de même de tout corps régulier, ou engendré par un plan de révolution. Si on peut connoître, dans tous les cas, le volume du corps, plus celui du fluide entraîné, on connoîtra le rapport de la réſiſtance qui ſuivra la relation des volumes inverſes. Ce raiſonnement eſt en effet aſſez conforme à l'expérience, comme on le verra dans notre Ouvrage. C'eſt en faiſant oſciller dans l'eau

Digitized by Google

les différens corps réguliers dont on cherche la réſiſtance, qu'on trouve par le raccourciſſement de la longueur du pendule, comparée aux tems de l'oſcillation, la quantité du fluide auquel le mobile communique ſon mouvement. Du reſte, l'expérience prouve que, quand les corps ſont ſemblables, les réſiſtances ſont proportionnelles aux quarrés des côtés homologues & aux quarrés des viteſſes; & cette loi a lieu dans l'air comme dans l'eau, du moins pour les corps qui ſont entièrement plongés dans ces fluides. Ainſi on peut appliquer à l'un des deux les expériences faites ſur l'autre, en ayant égard au rapport de leurs denſités, que nous montrons à apprécier très-exactement. Toutes ces recherches donnent du moins la réſiſtance directe dans tous les cas, & mettent ſur la voie pour la recherche des réſiſtances obliques.

Tout ce qui précède n'a lieu que pour les viteſſes communes, qui ont ordinairement lieu dans la pratique. Mais pour les mouvemens rapides, tels que ceux des corps lancés par les bouches à feu, nous faiſons voir que les réſiſtances croiſſent en

Digitized by Google

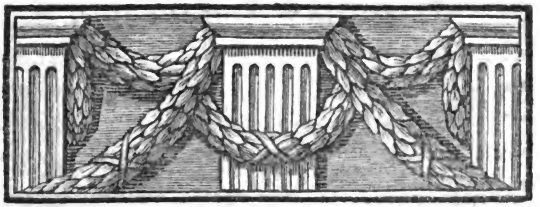
beaucoup plus grande raiſon que les quarrés des viteſſes, juſqu'à un certain terme, où le fluide ceſſe de ſuivre le corps, & où il ſe forme un vide derrière lui : à partir de ce point, ſi on augmente encore les viteſſes, les réſiſtances croiſſent en moindre raiſon que leurs quarrés.

Nous terminons cet ouvrage par une application des expériences qui ont été faites à l'Ecole Militaire ſur la réſiſtance des bateaux mus dans des canaux étroits, & par quelques nouvelles vues ſur la meilleure manière de diſpoſer les courſiers & les roues des moulins à eau.

Puiſſe ce travail, qui nous occupe depuis dix ans, être un tribut utile que nous payons à la Patrie, & contribuer aux progrès d'une ſcience d'où dépend en partie la ſplendeur, la force & la proſpérité de ce Royaume. Nous ſerons bien dédommagés de nos peines, ſi nos efforts paroiſſent avoir répondu à la confiance du Gouvernement, au zèle de ceux qui ont daigné favoriſer notre entrepriſe, & au deſir qui nous anime de mériter les ſuffrages de MM. de l'Académie, aux lumières deſquels nous ſoumettons les nôtres.

PRINCIPES

Digitized by Google



PRINCIPES D'HYDRAULIQUE.

PREMIERE PARTIE.

DU MOUVEMENT UNIFORME ET VARIÉ DES EAUX COURANTES.

SECTION PREMIERE.

Théorie générale du mouvement uniforme de l'Eau.

CHAPITRE PREMIER.

Idée générale de la fluidité ; du mouvement de l'Eau à la sortie des réservoirs. Différentes contractions d'orifice.

1. La fluidité est une propriété des liqueurs que nous avons de la peine à concevoir, & que nous refuserions de croire, si l'usage & l'expérience ne

Digitized by Google

nous l'avoient rendue familière ; c'eſt un phénomène phyſique qui n'a point été expliqué juſqu'à préſent, & dont il eſt difficile de rendre raiſon. Comment comprendre, en effet, qu'un corps matériel & incompreſſible ſoit compoſé de parties élémentaires ſi mobiles entr'elles, & ſi peu adhérentes, qu'il prenne la figure de tous les vaſes où on le met ; qu'il affecte toujours à ſa ſurface un niveau parfait ; qu'il repouſſe tous les corps qu'on y plonge avec une force égale au poids du liquide déplacé ; qu'il faſſe dans les ſiphons, ou lorſque le vent l'agite, des oſcillations, des balancemens, ou des ondulations iſochrones & ſemblables à celles des pendules ; & qu'enfin il s'écoule à la faveur de la moindre pente ?

2. Quelle que ſoit la figure ſous laquelle on conçoive les parties élémentaires de l'eau, on ne peut s'empêcher d'admirer des propriétés ſi ſingulières. Dira-t-on que les particules aqueuſes ſont de petites ſphères, dont la ſurface eſt parfaitement polie, ou qu'elles ſont encore entremêlées de parties de feu, infiniment plus petites qu'elles, & d'un poli auſſi achevé, qui facilitent leur mouvement, & leur procurent une liberté parfaite pour agir, réagir, & ſe mouvoir ſuivant toutes ſortes de directions ? Ajouteroit-on que l'eau n'eſt liquide que lorſqu'il ſe trouve aſſez d'élémens de feu, entre les élémens de l'eau, pour empêcher le contact immédiat des derniers ; mais qu'elle ceſſe de l'être quand ſes élémens ſe touchent par la ſouſtraction

Digitized by Google

de parties de feu ſuperflues, & cela en vertu de l'attraction qui agit à raiſon des ſurfaces, & de la proximité des parties qui ſe touchent? Toutes ces hypothèſes peuvent paroître probables; mais perſonne n'en peut démontrer la réalité. L'optique ne nous donne aucune notion ſur la figure de ces molécules élémentaires, dont l'inconcevable ténuité fait qu'elles nous échappent; & nous ſommes forcés d'avouer que la liquidité eſt une des merveilles dues à l'Auteur de la nature, qui a prodigué ſes miracles ſelon la meſure de l'utilité qui en devoit revenir à l'homme, en rendant l'élément de l'eau auſſi commun qu'il eſt merveilleux en lui-même, & néceſſaire aux uſages journaliers, à la nutrition, à la végétation, & à la conſervation des êtres organiſés.

3. Il y a pluſieurs liqueurs qui diffèrent eſſentiellement entr'elles par leur nature, leur denſité, leur poids & leurs propriétés. La fluidité n'eſt pas au même degré dans toutes. L'huile & les liqueurs graſſes en ont moins que l'eau pure; & l'eau elle-même eſt plus ou moins fluide, à raiſon de ſa pureté, & du plus ou moins de parties de feu qu'elle contient. Bouillante, elle eſt plus active & plus mobile; froide au contraire, & aux approches du terme de la congelation, elle paroît s'engourdir: au point de la glace, elle perd tout-à-coup ſa fluidité, & acquiert une propriété toute contraire, ſans ceſſer néanmoins d'être tranſparente.

4. Le premier phénomène & le plus familier

Digitized by Google

qu'on a dû obſerver, par rapport au mouvement de l'eau, eſt la viteſſe avec laquelle elle s'écoule par une ouverture ou *orifice* pratiqué au bas d'un réſervoir. On trouva que cette viteſſe eſt proportionnelle à la racine quarrée de la hauteur de la charge, c'eſt-à-dire, de la hauteur verticale qui ſe trouve depuis la ſurface de l'eau du réſervoir juſqu'au centre de l'orifice; ou, ce qui revient au même, que les viteſſes de l'eau qui s'écoule ſous différentes charges, croiſſent comme les viteſſes qu'un corps grave acquiert en tombant de différentes hauteurs. On pouvoit être porté à croire l'analogie parfaite, c'eſt-à-dire, que la viteſſe de l'eau étoit égale à celle que le corps a acquiſe quand il eſt tombé d'une hauteur égale à celle du réſervoir; mais on s'apperçut qu'il y avoit un déchet ſur cette viteſſe, & que le mouvement du fluide eſt retardé de la même manière que ſi l'orifice étoit diminué d'une certaine quantité, ou que l'action de la gravité fût moindre. Cet effet fut appelé contraction; & on ſait aujourd'hui qu'il dérive néceſſairement de la nature de tous les fluides, qui n'étant qu'un aſſemblage, un ſyſtême de molécules, ne peuvent s'écouler que dans l'ordre & ſuivant la marche qui convient à l'équilibre général de toutes leurs parties; en vertu de la peſanteur qui eſt la force motrice, & des obſtacles qui s'oppoſent à l'entier effet de cette force. La gravité eſt conſtante, à la vérité, du moins pour un même lieu; mais il y

Digitized by Google

a une variété infinie dans les circonſtances qui modifient les obſtacles; d'où il ſuit que la contraction eſt variée à l'infini. Ainſi il ne peut y avoir de formule générale du mouvement de l'eau, ni d'aucun fluide. Ce mouvement ne peut être repréſenté que par des formules différentes qui conviennent à divers cas, où les données ſont conſtantes, & dans leſquels la réſiſtance agit d'une manière ſemblable. Ces cas, où il eſt plus important de ſavoir calculer le mouvement de l'eau, ont été déterminés par la nature, ou par les divers uſages que nous faiſons de ce fluide. On peut les réduire à quatre principaux. 1°. Quand un réſervoir ſe vide par un orifice percé dans une mince paroi; 2°. quand on emploie un tuyau additionnel d'une certaine longueur; 3°. quand on oblige l'eau à paſſer par un tuyau fermé, ou dans un canal ouvert dont la ſection eſt conſtante, & la longueur aſſez grande pour que le mouvement y devienne uniforme; 4°. quand l'eau s'échappe par des reverſoirs. Les deux premiers ont été ſavamment traités par M. l'abbé Boſſut; nous traiterons, dans cet ouvrage, le troiſième avec toute l'étendue que mérite ſon importance; & nous parlerons en peu de mots du quatrième, dont l'application eſt plus rare. Mais la contraction étant le premier élément qui modifie le mouvement dans tous les cas, il eſt néceſſaire d'en acquérir une connoiſſance diſtincte, & de ſavoir l'apprécier autant qu'il eſt poſſible.

Digitized by Google

5. L'eau ne peut ſortir d'un réſervoir par un orifice quelconque, ſans que ſes parties n'affluent de toutes parts, autant qu'elles le peuvent, vers cet orifice, comme vers un centre, par un mouvement accéléré, & ſuivant toutes les directions. Le ſeul filet qui répond au centre de grandeur de l'orifice, décrit la ligne la plus droite qu'il eſt poſſible. Si l'orifice eſt horizontal, & placé au centre du fond d'un réſervoir, dont on ſuppoſe la grandeur infinie par rapport au diamètre de l'orifice, ce filet doit deſcendre verticalement, ſans ſe détourner d'aucun côté, & il n'a à eſſuyer d'autre réſiſtance que celle du frottement cauſé par l'excès de ſa viteſſe ſur celle des filets collatéraux; mais comme cet excès eſt infiniment petit, ſa viteſſe finale eſt ſenſiblement due à toute la hauteur du fluide au-deſſus de l'orifice. Ainſi, en nommant g la viteſſe acquiſe par un grave à la fin de la première ſeconde, & h la hauteur du fluide, on ſait que cette viteſſe, par ſeconde, ſera $\sqrt{2g}\sqrt{h}$, ou $\sqrt{724}\sqrt{h}$, en prenant le pouce pour l'unité de meſure. Les autres filets qui compoſent la colonne verticale du réſervoir, après être deſcendus preſque verticalement pendant quelque tems, ſont obligés de ſe détourner de la verticale par des courbes plus ou moins alongées, pour s'approcher de l'orifice; & en y arrivant enfin, ils ont des directions qui approchent plus ou moins de l'horizontale, ſelon qu'ils ſont deſtinés à paſſer plus ou moins près du bord de l'ori-

Digitized by Google

fice ou de ſon centre. Le mouvement de ces filets ſe décompoſe donc ſuivant deux directions ; l'une horizontale, où il ſe perd, par la réſiſtance diamétralement oppoſée des filets qui leur répondent de l'autre côté ; & l'autre verticale, en vertu de laquelle ils font effort pour paſſer par l'orifice. On voit par-là que la viteſſe verticale des filets, rangés ſur un même rayon de l'orifice, décroît du centre à la circonférence, & qu'ainſi la dépenſe totale doit être moindre qu'elle ne ſeroit, ſi tous les filets pouvoient ſe mouvoir verticalement, comme celui de l'axe. Il ſuit encore delà, que les filets qui avoiſinent le centre allant plus vîte que ceux qui ſont plus près des bords, la veine fluide, après être ſortie de l'orifice, doit former un cône, dont l'orifice eſt la baſe ; c'eſt-à-dire, qu'elle doit diminuer de diamètre au moins juſqu'à une certaine diſtance ; parce que les filets extérieurs ſont peu à peu entraînés, en vertu de la viſcoſité, par les filets intérieurs, dont la viteſſe eſt plus grande, ſans pouvoir ſe ſéparer d'eux ; d'où il réſulte une diminution dans le diamètre de la veine. Cet effet a été nommé pour ce ſujet *contraction*, & le plus petit diamètre s'appelle *diamètre de la veine contractée.*

6. M. l'abbé Boſſut a obſervé que le point de la plus grande contraction eſt diſtant du plan de l'orifice, d'une longueur à peu près égale à ſon rayon, & que le diamètre de la veine contractée eſt à celui de l'orifice à peu près dans le rapport

Digitized by Google

de 10 à 12,25, tellement que l'aire de l'orifice eſt à l'aire de la veine contractée, comme trois eſt à deux, environ. On ſent bien que cette meſure eſt très-délicate à prendre, & que ce ne ſont que des réſultats moyens. Quoi qu'il en ſoit, ſi l'effet qu'on vient de voir avoit ſemblablement lieu dans les orifices mêmes, à toute charge, à tout diamètre, & dans la ſituation verticale comme dans l'horizontale, on auroit la meſure exacte de la dépenſe par ſeconde dans tous les cas, pourvu qu'on ſût par l'expérience, le rapport qui exiſte entre la dépenſe qui auroit lieu, ſi tous les filets étoient mus avec la viteſſe due à la charge entière, & celle qui eſt effectivement donnée par l'obſervation. La première ſe nomme naturelle; & en nommant A l'aire de l'orifice, elle eſt égale (5) à $A\sqrt{724h}$. La ſeconde eſt la dépenſe effective qui eſt moindre dans un certain rapport. On peut exprimer celle-ci en deux manières différentes: 1°. en multipliant par $\sqrt{724h}$ une aire moindre que celle de l'orifice; 2°. en multipliant l'aire entière de l'orifice par $\sqrt{724-K}\sqrt{h}$, en nommant K une perte de gravité quelconque que l'expérience doit donner. Cette dernière expreſſion eſt préférable à la premiere, parce que l'aire entière & la hauteur y reſtent exprimées, & qu'elle donne d'ailleurs la viteſſe moyenne de tous les filets qui paſſent par l'orifice. Mais ſi on vouloit connoître la viteſſe moyenne des filets au point de

Digitized by Google

contraction, comme nous verrons dans la ſuite que cela eſt néceſſaire pour évaluer la hauteur des jets d'eau qui ſortent d'une mince paroi, il faudra connoître le vrai diamètre de la veine contractée, & l'employer dans l'expreſſion de la dépenſe.

7. Si on nomme D la dépenſe effective trouvée par une expérience, on aura $D = A\sqrt{724-K}\sqrt{h}$, d'où l'on tire $724-K = \left(\frac{D}{A\sqrt{h}}\right)^2$: en appliquant cette formule aux expériences que M. l'abbé Boſſut a faites ſur des orifices horizontaux, verticaux & inclinés, qui, à même charge, donnent ſenſiblement les mêmes dépenſes, on trouve les réſultats ſuivans.

Pour un orifice mince d'un pouce de diamètre, dont le centre eſt douze pouces au-deſſous de la ſurface de l'eau du réſervoir, la quantité 724—K eſt égale à 277,777 ; & elle diminue inſenſiblement, à meſure que les charges augmentent, tellement qu'elle ſe réduit à 275,201 pour une charge de 11 pi. 8 po. 10 li., & à 274,131 pour une charge de 15 pieds. Au contraire, dans une expérience où l'orifice n'étoit recouvert que d'une ligne de hauteur d'eau, cette quantité s'eſt trouvée égale à 304,193. Mais il eſt viſible qu'alors il n'y avoit point de déviation des filets à la partie ſupérieure de l'orifice, & la contraction devoit par conſéquent être moindre. Comme

Digitized by Google

dònc la légère diminution qu'éprouve la quantité 724—K, à mesure que les charges augmentent, peut être attribuée au frottement contre les bords de l'orifice & à la résistance de l'air, qui s'opposent à la sortie de l'eau, avec d'autant plus de force, que les vitesses deviennent plus grandes, nous pouvons conclure, d'après l'expérience, la quantité 724—K, sensiblement constante & égale à 278 pour les charges ordinaires, quand on emploie un orifice simple d'un pouce de diamètre.

Les expériences sur des orifices plus grands donnent encore sensiblement le même résultat : avec une charge de 11 pi 8 po 10 li, un orifice de deux pouces de diamètre, donne, par sa dépense, la quantité 724—K égale à 276,374, qui diffère peu de celle qui répond, à même charge, à l'orifice d'un pouce. Cette légère augmentation peut être attribuée à la moindre déviation des filets, causée par le moindre rapport de la capacité du réservoir au diamètre du nouvel orifice, ou au frottement des parois, qui est aussi moindre à proportion.

La figure de l'orifice influe aussi très-peu sur la dépense & sur la valeur de la quantité que nous considérons : qu'il soit circulaire, quarré, rectangulaire & même triangulaire, pourvu qu'il ait même surface. Cependant on ne peut pas nier que les orifices qui ont moins de périmètre à surface égale, ne donnent un peu plus de dépense que les autres ; mais on peut négliger, dans la

Digitized by Google

pratique, ces légères augmentations, & la formule $D = A\sqrt{278h}$ représente ſenſiblement la dépenſe par ſeconde, exprimée en pouces cubes, d'un orifice percé dans une mince paroi. La viteſſe moyenne de l'eau, à ſon paſſage par cet orifice, eſt exprimée par $\sqrt{278h}$; en nommant V & u la viteſſe naturelle & la viteſſe moyenne effective, on a $V : u :: \sqrt{724} : \sqrt{278} :: 8 : 5$, à peu de choſe près.

8. Si la dépenſe effective des orifices ſimples étoit les $\frac{2}{3}$ de la dépenſe naturelle, ces deux dépenſes ſeroient entr'elles dans le rapport de la ſphère au cylindre, & on en concluroit que, dans un diamètre quelconque de l'orifice, les viteſſes des filets, qui répondent à chaque point de ce diamètre, ſeroient repréſentées par l'élément correſpondant du méridien de la ſphère; que la viteſſe des filets qui touchent la paroi ſeroit nulle, & que celle dans le centre de l'orifice eſt due à la charge entière. Ces conſéquences ne s'écartent pas beaucoup de la vérité; & ſi elles ne ſont pas tout-à-fait exactes, ſi la dépenſe effective eſt un peu moindre que les $\frac{2}{3}$ de la viteſſe naturelle, il eſt problable que la viſcoſité du fluide en retarde l'écoulement. On peut au moins juger par-là dans quel ordre décroiſſent les viteſſes depuis le centre de l'orifice juſqu'à ſa circonférence, eu égard à la déviation des filets, qui eſt la principale cauſe de la diminution de la dépenſe.

Digitized by Google

9. La ſeconde eſpèce de contraction d'orifice eſt celle qui a lieu quand l'eau ſort d'un réſervoir par un tuyau d'une longueur médiocre, comme de deux ou trois fois ſon diamètre, & qu'elle coule à plein tuyau, en ſuivant ſes parois intérieures. En appliquant la formule $724-K = \left(\frac{D}{A\sqrt{h}}\right)^2$ aux expériences de M. l'abbé Boſſut, ſur ces tuyaux additionnels, on trouve que pour une charge de douze pouces, la quantité $724-K$ eſt égale à 469,58, & qu'elle diminue inſenſiblement à meſure que les charges augmentent; tellement qu'à 15 pieds de charge, elle n'eſt plus que de 463,756. Ses variations dépendent des mêmes cauſes que nous avons marquées ci-devant; & on pourroit ſuppoſer que, pour une charge moyenne ordinaire, elle eſt égale à 470. On auroit donc pour les tuyaux additionnels $D = A\sqrt{470\,h}$: mais M. l'abbé Boſſut avertit que les dépenſes des tuyaux additionnels qu'il rapporte, ſont un peu foibles en comparaiſon de celles des orifices minces, & il donne pour rapport exact des dépenſes naturelles, à celles des tuyaux additionnels, celui de 16 à 13. Nous ferons donc $724-K = 478$; &, au pis aller, la différence de $\sqrt{478}$ à $\sqrt{470}$ n'eſt que d'environ $\frac{1}{135}$, dont pourroient différer les viteſſes calculées d'après ces deux valeurs.

Il eſt très-difficile de rendre compte pourquoi un tuyau additionnel, de quelques pouces de

Digitized by Google

longueur, oblige la veine fluide à ſuivre ſa paroi, & augmente la dépenſe que faiſoit l'orifice mince dans le rapport de 10 à 13 : il faut pour cela que la déviation des filets ſe faſſe dans un ordre différent. Il paroît néanmoins conſtant que la viteſſe, qui a lieu dans l'axe du tuyau, reſte la même qu'auparavant ; c'eſt-à-dire, qu'elle eſt toujours due à toute la hauteur de la charge, ainſi que nous l'avons vérifié par l'expérience.

M. le chevalier de Borda a obſervé (Mém. de l'Acad. an. 1766) que l'eau paſſant par un tuyau additionnel, dont le bout pénètre dans le réſervoir, & eſt entouré d'eau de toute part, y éprouve plus de contraction que lorſque l'entrée du tuyau eſt dans le plan de la paroi du réſervoir, ou qu'elle eſt entourée d'un plateau. Cela vient, ſans doute, de ce que la déviation des filets eſt plus grande, parce que le bout du tuyau eſt iſolé : la quantité $724-K$ y eſt égale à 336, quand l'eau ſuit les parois.

Si, outre cela, l'eau ne ſuivoit pas la paroi du même tuyau additionnel iſolé, la contraction y ſeroit encore plus grande que celle qui a lieu dans les autres orifices percés dans une mince paroi, & $724-K$ ſe trouve égal à 191.

En général, puiſque la viteſſe eſt égale à $\sqrt{724-K}\sqrt{h}$, on a $h=\frac{V^2}{724-K}$; ainſi la charge néceſſaire pour imprimer à l'eau une viteſſe quelconque V, en paſſant par un orifice iſolé, percé

Digitized by Google

dans une mince paroi, eſt égale à $\frac{V^2}{278}$: celle qui ſeroit néceſſaire pour imprimer la même viteſſe par un tuyau additionnel ordinaire, eſt égale à $\frac{V^2}{478}$.

Mais ſi par la ſituation de l'orifice, ou par la forme du réſervoir, l'eau ſe dirige mieux vers l'orifice, la contraction deviendra moindre à meſure que les obſtacles, qui obligent les filets de ſe détourner, ſeront moindres. Ainſi, par exemple, un orifice quarré ou même circulaire, placé dans l'angle inférieur du réſervoir, ſera plus favorable à l'écoulement que celui qui ſeroit au bas & au milieu d'une de ſes faces verticales, ou au milieu d'un des côtés de ſon fond ; & ceux-ci donneront à leur tour moins de contraction que ceux qui ſont iſolés, c'eſt-à-dire, un peu diſtans des autres côtés du réſervoir. On pourroit diſtinguer ces divers degrés de contraction par des noms différens, comme *contraction environnante*, *contractions latérales*, *contraction ſupérieure*, *contraction inférieure*.

10. Quand on donne à un tuyau additionnel une longueur plus grande qu'environ trois à quatre fois ſon diamètre, l'eau éprouve, pour s'y mouvoir, un frottement qui commence à faire diminuer les dépenſes, & l'ordre des viteſſes, de l'axe à la circonférence, n'eſt plus le même qu'auparavant ; mais la charge néceſſaire pour imprimer à l'eau la viteſſe moyenne avec laquelle elle s'écoule, eſt toujours égale à $\frac{V^2}{478}$, quand même

Digitized by Google

la longueur du tuyau deviendroit très-grande, parce que la déviation des filets eſt ſemblable pour de petites viteſſes comme pour les grandes.

11. La troiſième eſpèce de contraction d'orifice eſt celle qui a lieu à l'entrée des longs tuyaux, ou du lit des canaux ouverts, dont la ſection eſt conſtante, & la longueur aſſez grande pour que le mouvement y devienne uniforme. Pour les tuyaux, cette contraction eſt la même qu'aux tuyaux additionnels, comme je viens de le dire, quant à la déviation des filets, mais non quant à la diminution de la dépenſe & de la viteſſe moyenne de l'écoulement, qui dépendent ici de deux cauſes; la contraction d'orifice à l'entrée du tuyau, & le frottement intérieur dans le tuyau. Ce ſont deux réſiſtances abſolument diſtinctes, que le poids de la charge doit vaincre : la première eſt toujours proportionnelle au quarré de la viteſſe, & exprimée, comme je viens de le dire, par $\frac{V^2}{478}$; la ſeconde dépend non-ſeulement de cette viteſſe, mais de pluſieurs autres cauſes dont nous parlerons bientôt.

Quant aux canaux, ſi le fond de leur entrée eſt de niveau avec le fond du réſervoir d'où ils tirent leur eau, il n'y a aucune contraction inférieure; ſi l'eau paſſe ſans obſtacle de la ſurface du réſervoir dans le canal, elle prend d'elle-même la chûte qui lui convient, au moyen d'une pente qui n'eſt point l'effet d'une contraction ſupérieure : reſtent donc les contractions latérales qui ſont bien

Digitized by Google

ſenſibles, ſur-tout quand la viteſſe eſt un peu grande. Nous avons remarqué à l'entrée d'un canal rectangulaire de 18 pouces de largeur, incliné de $\frac{1}{200}$, que l'eau qui y entroit ſur une hauteur de réſervoir de 8 à 9 pouces, après avoir gliſſé ſur les deux arêtes verticales de l'entrée, ſe détachoit entièrement des parois, juſqu'à la diſtance d'environ 20 lignes, & qu'elle s'en rapprochoit enſuite pour les rejoindre un peu en-deſſous. La ſurface latérale & concave de cette veine contractée étoit verticale, & laiſſoit voir à ſec le fond du canal entre elle & la paroi. Cet effet n'avoit lieu, à la vérité, que parce que la viteſſe de l'eau étoit fort grande; quand elle devenoit moindre, ce vide latéral étoit rempli par une eau ſtagnante ou tournoyante; & dans les plus petites viteſſes, on remarquoit toujours une contraction qui ſe rendoit ſenſible par l'irrégularité de l'écoulement vers chaque angle de l'entrée.

Le canal, ſous la forme d'un trapèze, donnoit lieu à une contraction beaucoup moindre, & la raiſon en eſt ſenſible; car ſa ſection s'évaſant beaucoup par le haut, il dépenſoit davantage à ſa ſurface que le canal rectangulaire; & n'y ayant point non plus de contraction ſupérieure, celle des côtés étoit diminuée auſſi par le poids même de l'eau qui rempliſſoit le vide inférieur qui tendoit à s'y former. Quoi qu'il en ſoit, nous avons trouvé que la valeur de 724—K varioit dans ces expériences, depuis

Digitized by Google

depuis 530 jusqu'à 660. Mais il est probable que si notre canal eût été beaucoup plus large, la contraction, qui ne peut être que latérale, auroit été d'autant moindre, que la somme des parois latérales auroit été plus petite que celle des largeurs du fond & de la surface.

Il paroit donc que, dans la pratique, quand la vitesse de l'eau est bornée, & la largeur d'un canal considérable en proportion de sa profondeur, la contraction d'orifice est très-peu sensible. Nous aurons occasion de revenir sur cet article dans la suite.

12. Enfin, la quatrième espèce de contraction est celle qui diminue la dépense des reversoirs. On en peut distinguer deux sortes. Les reversoirs peuvent être placés immédiatement dans une face d'un réservoir, ou être employés à barrer le cours d'une rivière ou d'un canal, comme sont les écluses sur les rivières navigables de la Flandre. Dans les premiers, la contraction latérale peut être sensible; dans les autres, elle se trouve d'autant plus diminuée, que le rapport de la largeur du canal à celle du reversoir sera moindre; & enfin elle devient nulle, lorsque ces deux largeurs sont égales. Mais la contraction inférieure a lieu dans ces deux sortes de reversoirs, parce que leur seuil est toujours plus haut que le fond du réservoir. La partie supérieure n'éprouve aucune contraction; car chaque filet supérieur a une vitesse réelle, due entièrement à sa chûte depuis la superficie du réservoir.

Digitized by Google

Dans la première eſpèce de reverſoirs, nous avons trouvé 724—K égal à environ 680; & dans la ſeconde, à peu près à 700. Il y a lieu de croire que cette quantité ſe rapprocheroit encore plus de 724, dans des reverſoirs ordinaires.

13. On voit, d'après ces obſervations, que nous ſommes bien loin de pouvoir calculer avec préciſion les effets de la contraction dans tous les cas; car il y a une variété infinie dans la diſpoſition des orifices, ſans parler de la contraction occaſionnée par les piles d'un pont, ou par une vanne à demi-levée, ſous laquelle on force l'eau de paſſer avec une certaine charge. Mais il étoit néceſſaire de donner ſur cette matière des notions un peu étendues, ſans leſquelles nous aurions eu de la peine à expoſer avec clarté ce que nous avons à dire ſur le mouvement uniforme.

CHAPITRE II.

Principe du mouvement uniforme; ſimilitude entre les tuyaux de conduite & le lit des rivières; formule primitive du mouvement de l'eau dans un lit quelconque.

14. NOUS nous propoſons d'examiner, dans le courant de cette première partie, les loix que ſuit l'eau, en vertu de ſa fluidité, pour couler dans le lit des rivières, des canaux & des tuyaux, en con-

Digitized by Google

ſidérant ſur-tout les viteſſes qu'elle y acquiert, à raiſon de ſa pente & des dimenſions du lit qui la renferme. Cette matière a été ſi peu approfondie juſqu'à préſent, malgré l'utilité dont doit être une théorie exacte ſur cette partie de l'Hydraulique, qu'elle peut paſſer pour neuve. On n'a tout au plus qu'effleuré les notions les plus communes ſur le cours des eaux ; & il ſe commet tous les jours des fautes très-graves en ce genre, par une ſuite naturelle de l'ignorance où ſont bien des perſonnes qui manient les eaux, des principes d'une ſcience qui intéreſſe tant le bien de la ſociété. Cependant nos erreurs ſont, en cette matière, d'une toute autre conſéquence que dans les objets de goût, de luxe ou d'agrément ; parce que toujours il en réſulte, ou un dommage réel, ou la perte de quelqu'avantage précieux.

15. Le mouvement de l'eau qui coule, dans le lit d'un fleuve, pour s'aller jetter dans la mer, eſt dû à deux cauſes : 1°. à l'action de la peſanteur, qui oblige les corps à deſcendre ſans ceſſe, quand aucun obſtacle ne les arrête ; 2°. à la mobilité des parties de l'eau, qui leur fait prendre un niveau parfait dans les vaiſſeaux clos, ou les détermine à s'écouler du côté où elles éprouvent moins de réſiſtance. En effet, ſi l'on imagine un élément de l'eau, une molécule primitive, preſſée de tous côtés par les autres élémens voiſins qui l'entourent dans un vaiſſeau fermé, la preſſion qu'elle éprouve étant égale de toutes parts, elle doit demeurer en

Digitized by Google

repos : mais ſi la ſurface de l'eau n'eſt pas de niveau, & qu'elle baiſſe d'un côté, comme cela arrive dans le courant d'un fleuve, la différence de hauteur qui ſe trouve entre la colonne d'eau qui pouſſe cet élément par derrière, & celle qui tend à l'appuyer pardevant, eſt la force qui oblige l'élément à ſe mouvoir du côté où la preſſion eſt moindre; & il obéit à cet effort avec beaucoup de facilité, à cauſe de l'extrême mobilité des parties de l'eau. On voit par-là que tous les élémens ſitués à différentes profondeurs, ſont pouſſés avec une égale force dans la direction du courant, & qu'ils doivent par conſéquent tendre à ſe mouvoir avec des viteſſes égales, depuis la ſurface juſqu'au fond.

Pour rendre cette vérité plus ſenſible, ſuppoſons que toute la maſſe de l'eau, contenue dans le lit d'une rivière, devienne immobile par la congélation, en conſervant néanmoins la pente qu'elle avoit à ſa ſurface; ſi tout-à-coup elle reprend ſa fluidité, les molécules ſituées au fond ou vers le milieu de la profondeur, ne ſeront pas plus preſſées, dans le ſens où le fluide peut ſe mouvoir, que celles de la ſurface. Une tranche tranſverſale de la rivière occupant, par exemple, un pouce de longueur à ſa ſurface, éprouvera une force accélératrice qui ſera à la gravité, comme la différence de niveau de l'amont à l'aval, eſt à un pouce; & le mouvement ſera uniquement produit par la pente qui ſe trouve à la ſurface du fluide,

Digitized by Google

ſans dépendre de la pente plus ou moins grande, plus ou moins régulière que peut avoir le fond du lit.

Nous établirons donc pour premier principe, *que la force motrice de chacune des molécules d'eau qui compoſent une rivière, provient ſimplement de la pente qu'elle acquiert à ſa ſurface.*

16. La pente d'une rivière, ainſi que celle d'un plan incliné, eſt la différence de niveau qui ſe trouve entre deux points qui ſont joints par une ligne droite, dont la longueur eſt connue : elle doit s'exprimer par la hauteur du plan, diviſée par ſa longueur. Dans l'expreſſion de la pente des rivières, on confond ordinairement la baſe du plan incliné avec ſa longueur, parce que ces deux lignes ſont ſenſiblement égales entr'elles. Nous avertiſſons donc ici que, quand nous parlerons de la pente des eaux courantes, nous entendrons ordinairement celle qui ſe prend à la ſurface de l'eau, & non celle du fond du lit : car, quoiqu'il ſoit aſſez commun que celle-ci ſoit parallèle à la première, il peut néanmoins auſſi s'y rencontrer des contrepentes & des inégalités qui ſortent de la règle ordinaire, & qui ne ſont point pour le préſent l'objet de nos recherches. Cette manière de prendre les pentes de l'eau, eſt d'autant plus raiſonnable, qu'un canal peut avoir beaucoup de pente ſur la longueur du fond de ſon lit, tandis qu'il eſt de niveau à ſa ſurface; & dans ce cas, l'eau n'y a aucun mouvement.

Digitized by Google

17. Nous appellerons *ſection du lit d'une rivière, d'un canal ou d'un tuyau*, le plan perpendiculaire à la direction du courant qui repréſente l'aire ou la coupe de la veine fluide qui eſt en mouvement ; & la *paroi* de cette *ſection* eſt le contour développé de cette ſection qui repréſente le profil du lit ſolide, dans lequel l'eau ſe meut. Ainſi la ſection du courant eſt un plan, la paroi de la ſection eſt une ligne. Mais quand nous dirons *la paroi d'un tuyau*, ou *la paroi d'un lit*, nous entendrons par ces expreſſions la ſurface intérieure d'un tuyau ou d'un lit qui eſt mouillée ou baignée par le fluide.

18. La peſanteur ſpécifique des liquides eſt indifférente pour leur mouvement, ſi on fait abſtraction de la réſiſtance que le lit oppoſe à leur deſcente. On ſait que l'eau tombe auſſi vîte dans le vide que le mercure, qui pèſe 14 fois autant. Mais il n'en eſt pas de même de la gravité : comme celle-ci eſt la cauſe réelle & immédiate de la chûte des corps, ſi elle vient à augmenter, la chûte, qui eſt ſon effet, devient auſſi plus grande dans le même tems ; & le contraire arrive, ſi elle vient à diminuer. On pourroit dire, par cette raiſon, que les fleuves coulent plus vîte vers les pôles que ſous l'équateur, parce que la gravité y eſt plus grande ; mais cet avantage eſt compenſé par le froid, qui y ôte à l'eau une partie de ſa fluidité, ainſi que nous l'avons éprouvé.

19. Si l'eau n'éprouvoit aucune réſiſtance de la part du lit dans lequel elle coule, ſi l'attraction des

Digitized by Google

parois de ſon lit étoit nulle, ſi ſa fluidité enfin étoit parfaite, ſa force accélératrice, c'eſt-à-dire, ſa peſanteur relative, accéléreroit continuellement ſon mouvement & précipiteroit ſon cours, à la manière des corps graves, qui tombent librement; c'eſt-à-dire, qu'elle acquerreroit ſans ceſſe de nouveaux degrés de viteſſe. Par-là, la terre & ſes habitans ſe trouveroient privés de tous les ſecours que nous tirons des eaux courantes; elles s'écouleroient ſi promptement, que la ſurface de nos campagnes, deſſéchée auſſi-tôt qu'arroſée, deviendroit inhabitable. La ténacité d'aucun ſol ne pourroit réſiſter à la violence des torrens, & la force accélératrice deviendroit un agent deſtructeur, ſi, par une providence bienfaiſante, la réſiſtance du lit & la viſcoſité de l'eau, n'étoient un frein qui la contient & met des bornes à ſa rapidité. Ainſi le frottement contre les bords, qui, par l'effet de la viſcoſité, ſe communique à toute la maſſe, & l'adhérence même que les molécules ont entr'elles & avec les parois, ſont des cauſes de réſiſtance qui ſont relatives aux viteſſes: de ſorte que la réſiſtance augmentant à meſure que les viteſſes deviennent plus grandes, elle doit parvenir à égaler la force accélératrice; alors la viteſſe acquiſe ſe maintient & reſte uniforme, ſans pouvoir acquérir de nouveaux degrés, à moins qu'il ne ſurvienne quelque changement dans la pente ou dans l'ouverture du lit.

20. Delà ſuit ce deuxième principe, ou plutôt

Digitized by Google

cet axiome, *que quand l'eau se meut uniformément, la résistance qu'elle éprouve est égale à sa force accélératrice.*

21. De même que dans la Théorie des écoulemens par des orifices, on considère l'aire de l'orifice, sa dépense & sa charge, & qu'on déduit de l'expérience la valeur de la vitesse moyenne de l'eau à l'orifice; nous considérerons aussi, dans la Théorie du mouvement uniforme, la section, la dépense & la pente d'un lit; & nous déterminerons, par le secours de l'expérience, quelle est la vitesse moyenne qui répond à cette dépense, & qui est produite par les deux autres données. Nous définissons cette vitesse moyenne, en disant que c'est une vitesse imaginaire, ou qui n'existe souvent qu'en un lieu de la section qu'on ne peut déterminer; qui est moindre que les plus grandes vitesses des filets du courant, plus grande d'ailleurs que les plus petites, & telle enfin que, si on la multiplie par la section, on trouve un produit égal à la dépense du courant, c'est-à-dire, à la masse d'eau qui s'est écoulée pendant un tems déterminé.

Mais comme on a besoin, dans ces sortes de recherches, d'une très-grande précision, & que, d'un autre côté, les expériences sur les rivières & les canaux sont peu susceptibles d'assez d'exactitude pour qu'on puisse s'assurer de bien mesurer leur dépense, il nous a été extrêmement avantageux de rapporter la théorie du mouvement

Digitized by Google

uniforme, aux obſervations faites, le plus ſouvent, ſur des tuyaux de conduite, dont la dépenſe, la charge & la ſection, ſe peuvent meſurer avec toute la préciſion qu'on peut déſirer. Ainſi il faut commencer par montrer la parfaite analogie qu'il y a entre un lit de rivière & un tuyau horizontal ou incliné.

22. Soit AB un tuyau horizontal dont AD eſt la charge entière. Cette charge eſt une force motrice qui peut être conſidérée comme diviſée en deux parties; l'une employée à imprimer la viteſſe, l'autre à vaincre la réſiſtance qui nait du mouvement dans toute la longueur du tuyau. Or, il n'y a qu'une ſeule combinaiſon, un ſeul partage qui puiſſe ſatisfaire à cette condition. Suppoſons que E ſoit le point de partage; de ſorte que DE étant la hauteur de charge néceſſaire pour imprimer à l'eau la viteſſe moyenne quelconque uniforme, avec laquelle elle doit couler (charge relative à la contraction d'orifice qui a lieu en A), le reſte EA ſoit la partie de la charge qui fait équilibre à la réſiſtance. Dans cette ſuppoſition, ſi on adapte au point E un tuyau de même longueur & de même diamètre que le premier, & qu'on l'incline juſqu'à ce que l'extrémité inférieure de ſon axe rencontre l'axe du tuyau AB, en un point quelconque C, je dis que les viteſſes ſeront égales dans les deux tuyaux, & qu'ils auront la même dépenſe : car la force motrice, dans le tuyau incliné, eſt compoſée des poids de la colonne DE Fig. 1.

Digitized by Google

& de la colonne EC. Mais en décompoſant ce dernier, on voit qu'une partie eſt détruite par la réſiſtance du plan incliné, & qu'il ne reſte qu'un poids égal à EA, qui pouſſe la colonne dans la direction EC. Tout eſt donc égal dans les deux tuyaux, forces motrices, longueurs, diamètres; il faut bien qu'il en réſulte même viteſſe & même réſiſtance.

Le tuyau EC a de plus une propriété particulière; c'eſt que le poids relatif, ou la force accélératrice d'une tranche quelconque de la veine fluide qu'il contient, eſt égal & fait équilibre à la réſiſtance de cette même tranche : car la réſiſtance ſur la longueur EK, eſt vaincue par le poids relatif de la colonne EK, comme celle ſur la longueur EC eſt vaincue par le poids de la colonne EC. On peut donc raccourcir ce tuyau ou l'alonger à l'infini, ſans faire varier la viteſſe, tant que la charge DE reſtera la même.

Si, en laiſſant la charge conſtante, on alongeoit le tuyau horizontal juſqu'en G, il faudroit que la viteſſe diminuât, pour que la charge fût encore capable de vaincre la réſiſtance augmentée par cet alongement : la diviſion ſe feroit en un point quelconque I, enſorte que DI ſeroit la chûte due à la nouvelle viteſſe, & IA le reſte de la charge employée à vaincre la réſiſtance; tellement que le mouvement de l'eau de ce tuyau ſe rapporteroit à celui d'un autre tuyau incliné IH, de même longueur.

Digitized by Google

23. Ce que nous venons de dire d'un tuyau horizontal peut s'appliquer à tout tuyau incliné AB, tel que ceux de la figure 2. En tirant l'horizontale CB, on voit que DC eſt la charge entière, ou la hauteur du réſervoir; & ſi DE eſt la hauteur due à la viteſſe, le tuyau EF, de même longueur que le précédent, aura auſſi la même viteſſe. Fig. 2.

Ainſi le mouvement, dans tout tuyau horizontal ou incliné, peut être rapporté à celui d'un autre tuyau incliné, dont la charge, au-deſſus de la priſe d'eau, eſt égale à la hauteur due à la viteſſe dans le tuyau. Or, dans ce cas, la force accélératrice eſt égale à la réſiſtance. Donc on peut conſidérer ce dernier tuyau comme une rivière, dont la pente & le lit ſont conſtans.

24. On peut encore conclure de ce qui précède que, abſtraction faite de la charge due à la viteſſe, un même tuyau incliné de quelque longueur qu'il ſoit, aura des viteſſes uniformes, relatives à toutes les inclinaiſons qu'on peut lui donner; c'eſt-à-dire, qu'à chaque inclinaiſon différente répondra une viteſſe uniforme, qui croîtra toujours à meſure que l'inclinaiſon augmentera, juſqu'à ce que le tuyau étant devenu vertical, & ſa pente ne pouvant plus augmenter, la viteſſe relative à la ſeule pente ſoit parvenue au plus grand degré qui convienne à ce tuyau.

On voit à préſent combien il nous a été avantageux de conſidérer, ſous ce point de vue, le mouvement de l'eau dans un lit quelconque: car

Digitized by Google

on peut pouſſer juſqu'au ſcrupule, l'exactitude dont ſont ſuſceptibles les expériences faites ſur des tuyaux de conduite ; la dépenſe en peut être facilement meſurée, & on en déduit la viteſſe moyenne exacte. Ainſi, ayant ajouté aux expériences de M. l'abbé Boſſut, celles de pluſieurs tuyaux d'un moindre diamètre, & les ayant comparées à celles d'un canal factice, d'un grand canal & d'une rivière aſſez conſidérable, nous avons eu une ſuite très-étendue de viteſſes, depuis les pentes & les ſections les plus petites, juſqu'aux plus grandes.

25. Dans tous nos calculs, nous avons pris le pouce pour l'unité de longueur, & la ſeconde pour l'unité de tems. La pente eſt toujours exprimée par la fraction $\frac{1}{b}$, en ſuppoſant que, ſur la longueur b, il y a un pouce de différence de niveau. Ainſi la pente d'une rivière qui auroit un pouce & demi de pente, par exemple, ſur 120 toiſes de longueur, qui valent 8640 pouces, ſeroit exprimée par $\frac{1,5}{8640} = \frac{1}{5760}$: mais s'il s'agit d'un tuyau de conduite dont on connoît la longueur, & la hauteur de réſervoir (*) ou la charge entière, il

(*) Si l'entrée d'un tuyau ſe trouve abaiſſée d'une hauteur quelconque, au-deſſous du niveau de l'eau du baſſin d'où il prend ſon eau, & que ce baſſin ait une capacité qui ſoit en grand rapport avec le diamètre du tuyau, on donne à la hauteur qui ſe trouve depuis la ſurface de l'eau juſqu'au centre de l'orifice du tuyau, le nom de *charge*; mais ſi le

Digitized by Google

faudra, pour avoir sa pente, commencer par retrancher de la hauteur du réservoir la chûte due à sa vitesse réelle, qui est égale, à cause de la contraction (9) à $\frac{V^2}{478}$, & considérer le reste de la hauteur de réservoir comme une pente répartie sur toute sa longueur. Le quotient de cette longueur, divisée par ce reste, sera la valeur de *b*.

En général, la pente exprime le rapport qu'il y a entre le poids absolu de la colonne d'eau employée à vaincre la résistance, & celui de la colonne de même diamètre qui se meut. Ainsi, dans toute pente uniforme, la résistance qu'éprouve une colonne d'eau d'une longueur quelconque, est égale au produit du poids absolu de cette colonne, multiplié par la pente.

26. Avant que les observations nous eussent fait connoître le rapport des résistances aux vitesses, nous avons dû supposer que les résistances croissoient comme le quarré des vitesses, & qu'elles sont par conséquent égales à $\frac{V^2}{m}$, en nommant *m* une quantité constante; &, en effet, il est bien des cas où cette hypothèse ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité. Si *g* exprime la vitesse acquise

---

tuyau, outre la charge d'eau au-dessus du centre de son orifice, a encore sur sa longueur une pente uniforme ou irrégulière, on désigne en général, sous le nom de *hauteur de réservoir*, la différence de niveau qui se trouve entre la surface de l'eau du bassin supérieur & l'extrémité inférieure du tuyau de conduite.

Digitized by Google

par un grave à la fin d'une ſeconde, $\frac{g}{b}$ ſera la force accélératrice relative à la pente $\frac{1}{b}$: ainſi, d'après le principe fondamental (20), on aura $\frac{V^2}{m} = \frac{g}{b}$, & $V\sqrt{b} = \sqrt{mg}$: c'eſt-à-dire, que, dans un même lit, le produit de la viteſſe, par l'inverſe de la racine quarrée de la pente, doit être une quantité conſtante. Donc, en faiſant abſtraction de toutes les forces auxquelles les molécules de l'eau peuvent être aſſujéties, la formule primitive de toutes les viteſſes uniformes d'un même lit eſt $V = \frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{b}}$.

Nous allons confronter avec l'expérience, dans le chapitre ſuivant, l'équation fondamentale $V\sqrt{b} = \sqrt{mg}$, & en faire l'application à différens lits.

CHAPITRE III.

L'expérience prouve que les réſiſtances d'un même lit croiſſent en moindre raiſon que le quarré des viteſſes : comment la grandeur & la figure du lit influe ſur les viteſſes.

27. QUAND nous avons comparé, avec un grand nombre d'expériences, le réſultat $V\sqrt{b} = \sqrt{mg}$, nous avons reconnu que les valeurs

Digitized by Google

de $V\sqrt{b}$, quoique prises dans un même lit, ne sont pas exactement constantes, mais qu'elles croissent un peu, à mesure que les vitesses augmentent. Nous avons été obligés d'en conclure que *les résistances sont en moindre raison que le quarré des vitesses*, ou que les vitesses augmentent plus que les racines des pentes ; tellement que $\sqrt{b}$ ne doit pas être employé dans toute l'intégrité de sa valeur ; mais il doit être diminué d'une quantité qui soit, avec la racine de l'inverse de la pente, en d'autant plus grand rapport, que cette racine est plus grande. Ce n'est pas encore ici le lieu de rendre compte des recherches qui nous ont conduit à déterminer la fonction de la pente qui concourt à rendre $\sqrt{mg}$ constante ; nous les réservons pour le chapitre cinquième : mais il suffira, pour mettre de l'ordre & de la clarté dans l'exposition de cette théorie, de dire, par anticipation, que cette fonction est exprimée dans presque tous les cas par $\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}$, en employant les logarithmes hyperboliques. Pour le présent, nous appellerons X cette fonction, en faisant $VX = \sqrt{mg}$, quantité constante pour un même lit. Le tableau suivant fait voir qu'en effet cette quantité est constante dans les expériences qui ne varient que par les pentes ; mais qu'elle est variable quand les lits sont différens. Ce tableau est extrait de celui que nous donnerons plus bas, (§. 55) pour comparer les résultats de l'expérience & de

Digitized by Google

la théorie, & ne présente, pour éviter d'être diffus, qu'un abrégé des principales observations faites sur les pentes & les lits variés, qui ont été soumis à l'expérience.

Tableau des valeurs de VX *ou* $\sqrt{mg}$, *constantes pour un même lit; & variables, quand les lits sont différens.*

Numéros des expériences tirées du tableau. du par. 55.	Valeurs de b, ou inverses des pentes.	Valeurs de X ou de $\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}$	Vitesses moyennes tirées de l'expérience.	Valeurs de VX, d'après l'expérience.	Valeurs moyennes de VX.
			po.	po.	
Tuyaux d'une ligne & demie de diamètre.					
6	1,07805	0,54633	41,614	22,7	22,85
9	7,03597	1,57580	14,642	23,0	
Tuyaux de deux lignes de diamètre.					
15	1,29174	0,60620	51,151	31,0	31,1
19	20,01636	2,93900	10,620	31,2	
Tuyaux de deux lignes & neuf dixièmes de diamètre					
26	1,21569	0,58558	73,811	43,2	43,3
30	6,45035	1,49808	28,658	42,9	
36	21,66390	3,08277	14,295	44,0	
Tuyaux d'un pouce de diamètre.					
39	5,65026	1,38713	84,945	117,8	118,8
42	10,78798	2,02756	58,310	118,2	
47	64,15725	5,9192	19,991	117,8	
51	132,16170	9,0509	13,315	120,5	
57	54,5966	5,3768	22,282	119,8	

Tuyaux

Digitized by Google

NUMÉROS des expériences tirées du tableau. du par. 55.	VALEURS de b, ou inverses des pentes.	VALEURS de X ou de $b - L.\sqrt{b+16}$	VITESSES moyennes tirées de l'expérience.	VALEURS de VX, d'après l'expérience.	VALEURS moyennes de VX.
		Tuyaux de seize lignes de diamètre.			
61	37,0828	4,2639	po. 33,160	po. 141,4	po. 141,4
64	66,3020	6,0360	23,360	141,0	
68	125,6007	8,7870	16,128	141,7	
		Tuyaux de deux pouces & un centième de diamètre.			
71	21,47087	3,0661	58,903	180,6	181,6
76	70,14263	6,2410	29,215	182,4	
82	188,5179	11,1093	16,377	181,8	
		Canal trapeze de 18po.,84 de section, & 13po.,06 de paroi.			
90	212,0	11,882	27,51	326,8	326,8
		Canal rectangulaire de 51po.,75 de section, & 23po.,25 de paroi.			
111	1412,0	33,9537	12,10	411,0	411,0
		Canal rectangulaire de 105po.,78 de section, & 29,po 17 de paroi.			
113	1412,0	33,9537	15,11	513,3	513,3
		Canal trapeze de 119po.,58 de section, & 31po.,06 de paroi.			
99	432,0	17,752	30,16	535,4	535,4
		Tuyau de dix-huit pouces de diamètre.			
89	304,97	14,604	39,159	571,0	571,0
		Grand canal de 10475 pouces de section, & 360 pouces de paroi.			
118	15360,	119,12	12,25	1459,0	1459,0
		Rivière de 30905 pouces de section, & 567 pouces de paroi.			
124	32951,	176,33	10,42	1837,0	1837,0

Digitized by Google

28. On voit par ce tableau que la pente n'influe point sur la valeur de VX ou de son égale $\sqrt{mg}$; mais que cette quantité devient de plus en plus grande, à mesure que les lits augmentent; & cet effet est une suite du frottement, car la résistance que l'eau éprouve à chaque section transversale du lit, ne peut être produite que par les parois qui la contiennent : ainsi, par exemple, si la vitesse, la pente & la section restent les mêmes, la résistance sera d'autant plus grande que la paroi augmentera en vertu de la figure du lit; & au contraire, si, toutes choses égales d'ailleurs, la section vient à augmenter, la résistance de chaque molécule deviendra d'autant moindre, que la résistance totale aura à se partager sur un plus grand nombre d'élémens. En un mot, il est clair que la résistance de chaque molécule est en raison directe de la paroi, & inverse de la section. Ainsi, dans l'expression de la résistance, $\frac{V^2}{m}$, la quantité m ne peut être constante que pour un même lit; mais elle doit varier, pour les lits différens, dans le rapport de la section à la paroi, puisque la résistance diminue à mesure que ce rapport augmente.

29. Dans un lit régulier, comme est celui des tuyaux de conduite, la section est l'aire d'un cercle, la paroi est une circonférence, & le quotient de l'une divisé par l'autre est toujours égal à la moitié du rayon, ou au quart du diamètre. Dans les lits irréguliers, ce quotient est encore une

Digitized by Google

ligne, qui, étant multipliée par le périmètre d'un lit, donne une ſurface égale à celle de ce lit. Nous nommerons en genéral cette ligne *rayon moyen* ou *r*.

30. On voit donc que, puiſque *m* doit être proportionnelle à *r*, la quantité $\sqrt{mg}$ doit être en raiſon de $\sqrt{r}$, pour des lits différens, & que $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r}}$ devroit être une quantité conſtante dans tous les cas. C'eſt ce que nous allons examiner, au moyen du tableau ſuivant, dans lequel la première colonne exprime les diamètres des tuyaux, ou la ſection & la paroi des autres lits; la ſeconde, la valeur de la racine quarrée du rayon moyen; la troiſième, les valeurs de VX ou $\sqrt{mg}$, trouvées par l'expérience dans le tableau précédent; & la quatrième, les valeurs de $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r}}$.

Digitized by Google

DIAMÈTRE des tuyaux, ou section & paroi des lits.	VALEURS de $\sqrt{r}$	VALEURS moyennes de VX, ou $\sqrt{mg}$, selon l'expérience.	VALEURS de $\frac{VX}{\sqrt{r}}$ ou de $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r}}$
po. li.			
Diam. 0 1,5	0,17677	22,85	129
Diam. 0 2,0	0,2041	31,1	152
Diam. 0 2,9	0,2458	43,3	176
Diam. 1 0	0,5000	118,8	237
Diam. 1 4	0,57735	141,4	245
Diam. 2,01	0,7089	181,6	256
po. po.			
Sec. 18,84 Par. 13,06	1,20107	326,8	272
Sec. 51,75 Par. 23,25	1,49191	411,0	275
Sec. 105,78 Par. 29,17	1,90427	513,3	270
Sec. 119,58 Par. 31,06	1,96219	535,4	272
po. li.			
Diam. 18 0	2,121	571,0	269
po. po.			
Sec. 10475 Par. 360	5,394	1459,0	269
Sec. 30905 Par. 567	7,376	1837	249

31. Il est aisé de remarquer, d'après ce tableau, que les quantités $\sqrt{mg}$ ne sont point proportionnelles à $\sqrt{r}$, ni à aucune puissance de r, mais qu'elles augmentent de moins en moins à mesure que $\sqrt{r}$ devient plus grand. Ce n'est que dans de très-grands lits que $\sqrt{mg}$ devient sensiblement proportionnelle à $\sqrt{r}$, tandis que dans les petits la vitesse diminue beaucoup plus que les valeurs de $\sqrt{r}$. Cet effet paroît être dû à une cause fort simple, qui est l'adhésion de l'eau à la paroi.

Digitized by Google

On ſait que l'eau éprouve, de la part des corps ſolides, une attraction qui s'étend à une certaine diſtance aſſez conſtante : j'ai éprouvé qu'une ſurface de fer blanc de 23 pouces quarrés a enlevé, avant que de ſe ſéparer de l'eau, un poids d'eau de 1601 grains ; c'eſt 70 grains par pouce quarré, ou une hauteur d'eau de $0^{po.},1877$. Une autre ſurface de $5^{po.},63$ quarrés a enlevé de même un poids d'eau de 365 grains : c'eſt 64,83 grains par pouce quarré, ou une hauteur d'eau de $0^{po.},173$. Ainſi, l'attraction d'une ſemblable paroi équivaut au moins au poids de deux lignes de hauteur d'eau. Or, cet effet répond à celui d'un rétréciſſement de lit, qui, en diminuant davantage la ſection que la paroi, occaſionne auſſi ſur le rayon moyen une diminution beaucoup plus ſenſible dans les petits lits que dans les grands. Pour repréſenter cet effet d'une manière analytique, nous avons eſſayé de retrancher de $\sqrt{r}$ une quantité conſtante & homogène, & nous avons trouvé qu'en effet $\sqrt{mg}$ eſt proportionnel à $\sqrt{r} - 0,1$; ou, ce qui eſt la même choſe, que $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r} - 0,1}$ eſt une quantité conſtante & égale à VX. On en jugera par le tableau ſuivant.

Digitized by Google

DIAMÈTRE des tuyaux, ou section & paroi des lits.	VALEURS de $\sqrt{r} - 0,1$	VALEURS de VX, ou $\sqrt{mg}$ selon l'expérience.	VALEURS de VX / $\sqrt{r} - 0,1$ ou de $\sqrt{mg}$ / $\sqrt{r} - 0,1$
po. li.			
Diam. 0 1,5	0,07677	22,85	297
Diam. 0 2,0	0,1041	31,1	298
Diam. 0 2,9	0,1458	43,3	297
Diam. 1 0	0,4000	118,8	297
Diam. 1 4	0,47735	141,4	296
Diam. 2,01	0,6089	181,6	298
po. po.			
Sec. 18,84 Par. 13,06	1,10107	326,8	297
Sec. 51,75 Par. 23,25	1,39191	411,0	295
Sec. 105,78 Par. 29,17	1,80427	513,3	284
Sec. 119,58 Par. 31,06	1,86219	535,4	287
Diam. 18 po. 0 li.	2,021	571,0	282
Sec. 10475 po. Par. 360 po.	5,294	1459,0	275
Sec. 30905 Par. 567	7,276	1837,0	252

32. On voit donc que les valeurs de $\sqrt{mg}$, ou les vitesses à même pente, dans des lits différens, sont proportionnelles aux valeurs de $\sqrt{r} - 0,1$, sur-tout en ayant égard à l'effet de la viscosité, que nous discuterons dans la suite; effet presque insensible dans les petits lits, mais qui devient assez considérable dans les grands, parce qu'il est proportionnel aux masses fluides en mouvement. Voilà ce qui rend très-intéressantes les expériences sur des tuyaux d'un très-petit diamètre, dans lesquels on peut considérer comme

Digitized by Google

nul l'effet de la viſcoſité, & prendre le nombre 297 pour la valeur générale de $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r-0,1}}$.

33. Puiſqu'on a $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{r-0,1}} = 297$, on aura auſſi $m = \frac{(297)^2}{g}(\sqrt{r}-0,1)^2 = \frac{88209}{362}(\sqrt{r}-0,1)^2 = 243,7\,(\sqrt{r}-0,1)^2$ que nous déſignerons par $n(\sqrt{r}-0,1)^2$. Ainſi, lorſque nous avons exprimé (26) le frottement par $\frac{V^2}{m}$ la quantité m étoit variable, & ſa valeur générale doit être $\frac{V^2}{n(\sqrt{r}-0,1)^2}$ dans laquelle n eſt une quantité abſtraite, invariable, égale à 243,7, donnée par la nature de la réſiſtance que l'eau éprouve entre ſes parois, & qui en indique l'intenſité.

Enfin, puiſque $m = n(\sqrt{r}-0,1)^2$ on a $\sqrt{mg} = \sqrt{n}g(\sqrt{r}-0,1)$, & l'expreſſion de la viteſſe, ou la formule devient $V = \frac{\sqrt{n}g(\sqrt{r}-0,1)}{X} = \frac{297(\sqrt{r}-0,1)}{X}$. Nous allons à préſent développer les recherches qui nous ont amenés à connoître la valeur de X.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

Considérations générales sur la nature de la résistance causée par le frottement.

34. L'OPINION la plus probable sur la nature des molécules de l'eau, & la plus conforme aux propriétés de cet élément, est que ce sont de très-petites particules de matière, parfaitement rondes, parfaitement dures, incompressibles par conséquent, & très-polies. De-là il résulte que, comme elles ne se touchent que par un seul point, aucune pression, si grande qu'elle soit, ne peut augmenter le contact de deux molécules, ni par conséquent influer sur l'énergie de leur frottement. Dans les masses solides, dont les parties friables peuvent se diviser & se comprimer, une grande pression augmente le nombre des points de contact. Nous ne nierons point que quelques expériences ont pu faire soupçonner une foible compression dans l'eau; mais en supposant qu'elle existe, l'effet en seroit trop peu sensible pour en tenir compte. Il est donc certain que l'incompressibilité de l'eau, sinon absolue, du moins sensible, fait que ses molécules ont toujours la même facilité à se mouvoir, quelle que soit leur charge supérieure. Une expérience décisive à cet égard est celle que nous rapportons

Digitized by Google

ci-après (363) de deux ſyphons de même diamètre, & de même longueur développée d'eau, mais configurés de manière à produire des preſſions très-différentes. On y voit qu'en imprimant à ces deux colonnes d'eau des viteſſes égales, les effets de la réſiſtance ſont égaux, & par conſéquent reſtent indépendans de la preſſion.

Quoique ce principe ne ſoit pas conforme à l'opinion de quelques Phyſiciens, nous ne pouvons nous refuſer à l'évidence de l'expérience, & nous établiſſons comme certain *que la réſiſtance de l'eau eſt indépendante de la preſſion* : ainſi, les viteſſes dans différens lits, qui, avec des figures diſſemblables, ont des rayons moyens égaux, ne peuvent varier que par les pentes.

35. Mais ſi la réſiſtance eſt indépendante de la preſſion, comment eſt-elle produite? Voici quelques conjectures à cet égard qui ne répugnent ni au raiſonnement ni à l'expérience, & qui paroiſſent admiſſibles, quoiqu'elles n'aient pas l'évidence d'une démonſtration.

Lorſque l'eau coule ſur des parois, elle les mouille, c'eſt-à-dire que ſes molécules, attirées par ces parois, en pénètrent les pores, autant que leur ténuité le permet, en rempliſſent toutes les cavités, & forment une ſurface compoſée de globules contigus & immobiles, ou capables tout au plus de tourner ſur eux-mêmes : cette ſurface, parfaitement unie par rapport à nos ſens, ne l'eſt pas cependant, à beaucoup près, par rap-

Digitized by Google

port à d'autres molécules de la même grosseur que les premières, qui ne peuvent glisser dessus, sans s'engager & se dégager successivement des interstices résultans de la figure sphérique. Ainsi, les molécules qui touchent immédiatement celles qui sont collées à la paroi, étant considérablement retardées, altèrent aussi le mouvement de celles qui les touchent; & la résistance ou l'inertie du lit se communiquant ainsi de proche en proche, répand sa force coercitive sur toute la masse. La viscosité, cet effet de l'attraction ou de l'adhésion qu'ont entre elles ces mêmes particules, concourt à augmenter cette résistance; car, si les molécules les plus éloignées de la paroi tendent à aller plus vîte, elles ne peuvent le faire sans entraîner un peu celles qui avoisinent la paroi; & si celles-ci sont retardées davantage par la paroi, elles retardent aussi un peu le mouvement des premières, tellement qu'il résulte de toutes ces actions & réactions un mouvement moyen de toute la masse, dans laquelle la vitesse des filets décroît à mesure qu'ils sont plus près de la paroi. Voyez les expériences des paragraphes 388., & suivans.

36. En considérant comment l'eau prépare elle-même la surface sur laquelle elle coule, on voit que la différence des matières dont peut être composée la paroi, ne doit pas en apporter de bien sensible sur la résistance. Nous n'avons en effet trouvé aucune variation dans le frotte-

Digitized by Google

ment, qu'on pût rapporter à cette cause, dans les différens cas où l'eau couloit sur du verre, du plomb, de l'étain, du fer, du bois & différentes espèces de terres.

37. Si on suppose un globule engagé entre deux autres globules contigus & immobiles, l'effort nécessaire pour le dégager sera d'autant plus grand qu'on voudra le mouvoir plus vîte : mais si cette molécule est forcée de se mouvoir sur une file de globules semblables, chaque résistance étant comme les vitesses, & le nombre des obstacles augmentant encore dans le même rapport, il s'ensuit que les résistances totales doivent croître comme les quarrés des vitesses. Cependant l'expérience nous apprend qu'elles n'augmentent pas exactement dans ce rapport, & qu'il en est ici à-peu-près comme du frottement des corps solides, où l'engrenage diminue à mesure que la vitesse augmente. Dans les petites vitesses, l'engrenage étant à-peu-près le même, les résistances sont sensiblement comme les quarrés des vitesses. Dans les grandes comparées entre elles, le même rapport doit encore avoir lieu ; mais si l'on compare de petites vitesses, où l'engrenage est complet, avec de très-grandes vitesses, où les molécules ne s'engagent que très-peu, la résistance, dans le dernier cas, doit être presque nulle, en comparaison de la première, c'est-à-dire que la résistance doit être finie pour une vitesse infiniment grande. Tout cela est assez conforme aux

Digitized by Google

résultats de l'expérience. Dans les petites pentes les vitesses sont sensiblement comme les racines quarrées de ces pentes, on comme celles des résistances; mais ce rapport s'éloigne d'autant plus de l'exactitude, que les vitesses ou les pentes sont plus grandes.

Ainsi, dans la formule $V = \frac{\sqrt{ng(\sqrt{\ } - 0,1)}}{X}$, qu'on peut réduire à $V = \frac{A}{X}$, en supposant le rayon moyen constant, X est sensiblement égal à $\sqrt{b}$ quand la pente est très-petite, ou b très-grand : mais pour représenter la vitesse, à mesure que la pente augmente, il faut qu'on ait $X < \sqrt{b}$, & que $\frac{\sqrt{b}}{X}$ augmente d'autant plus que $\sqrt{b}$ diminue.

C'est d'après cette donnée que nous avons cherché à déterminer la valeur de la quantité X; & pour parvenir à l'assujettir à la marche de la nature, il a fallu embrasser les effets, depuis les plus petites vitesses, jusqu'aux plus grandes possibles: mais comme les lits ouverts ne peuvent pas être assez inclinés pour produire de très-grandes vitesses, nous nous sommes principalement attachés à observer le mouvement de l'eau dans des tuyaux qu'on peut incliner jusqu'à la situation verticale. Dans ce cas, la pente $\frac{1}{5}$ est la même que $\frac{1}{5}$, & la vitesse uniforme à toute longueur est la plus grande possible; cependant on peut produire dans un tuyau des vitesses encore plus

Digitized by Google

grandes, en donnant une charge plus grande que celle qui répond à la vitesse uniforme.

38. Soit le tuyau vertical AB, dont la charge CA est la hauteur due à la vitesse ; le mouvement y sera uniforme, quelque longueur qu'on donne à ce tuyau ; la pente sera 1 ; & le poids total de la colonne qui se meut est la mesure de la résistance. Dans ce cas, la valeur de $\frac{1}{b}$, considéré comme pente, est à son *maximum*, & b ne peut pas être moindre que l'unité : mais si on considère cette quantité comme le rapport du poids de la colonne qui est employée à vaincre la résistance, au poids de celle qui se meut, elle peut surpasser l'unité, & b devenir moindre que 1 : car si l'on augmente la charge jusqu'en E, sans changer la longueur du tuyau, la vitesse augmentera ainsi que la résistance. Supposons que EF > CA soit la hauteur due à la nouvelle vitesse ; alors FB, c'est-à-dire la colonne qui fait équilibre à la résistance, sera plus grande que celle qui se meut ; & tandis que $\frac{1}{b} = \frac{FB}{BA}$ est plus grand que l'unité, b au contraire devient moindre. Ainsi, dans ces sortes de vitesses, $\frac{1}{b}$ n'est qu'une pente fictive, & ne peut être considéré que comme le rapport de la résistance au poids de la colonne mue. Fig. 3.

39. Quoique ce rapport puisse surpasser l'unité, il ne peut jamais devenir infini ; car en supposant qu'on augmente la charge du tuyau jusqu'à ce qu'elle devienne infinie, qu'en résultera-t-il pour

la viteſſe ? Si elle étoit finie, & qu'on retranchât de la hauteur entière de la charge celle qui lui ſeroit due, le reſte ſeroit une colonne infinie, employée à vaincre la réſiſtance d'une viteſſe finie, ce qui eſt contraire à la loi obſervée juſqu'à préſent; la viteſſe ſeroit donc infinie, & en retranchant la hauteur infinie qui lui eſt due, de la charge entière, qui eſt auſſi infinie, le reſte ſeroit probablement une hauteur finie, faiſant équilibre à la réſiſtance, qui ſans doute le ſeroit auſſi; & ce raiſonnement s'accorde avec ce que nous venons de conclure (37) de notre hypothèſe ſur la nature du frottement de l'eau.

40. La valeur de b peut donc demeurer finie, quoique la viteſſe devienne infinie. Ainſi, en adoptant ce principe, nous l'avons confronté avec nos expériences, qui offrent une ſuite de valeurs de $\frac{1}{b}$, depuis $\frac{1}{35000}$ juſqu'à $\frac{1}{0,9}$, ce qui nous a mis en état de connoître la relation entre la viteſſe & la réſiſtance, ou du moins de pouvoir l'exprimer d'une manière analytique très-rapprochée.

Pour cela il falloit réduire toutes nos expériences à un ſeul lit, parce qu'il n'étoit pas poſſible de faire varier les pentes dans un même lit, depuis les plus grandes juſqu'aux plus petites; & cette réduction ne peut paroître ſujette à aucune difficulté, puiſque nous avons trouvé (32) que les viteſſes, à même pente, dans des lits différens, ſont proportionnelles aux valeurs de $\sqrt{r} - 0,1$. Cette vérité eſt d'ailleurs aſſez ſenſible par la com-

Digitized by Google

paraiſon de quelques expériences du tableau, (§. 55) où le haſard a fait que les valeurs de *b*, ou les pentes ſont ſenſiblement égales, dans des lits très-différens. En effet, ſi on compare deux à deux les expériences 5 & 22, 9 & 40, 36 & 71, 44 & 60, on aura les réſultats ſuivans.

NUMÉROS des expériences tirées du tableau parag. 55.	VALEURS de *b*.	VALEURS de $\sqrt{r} - 0,1$	VITESSES d'expériences	RAPPORTS de $\sqrt{r} - 0,1$	RAPPORTS des viteſſes.
			po.		
5	1,0396	0,076776	42,385	....1,899..	1,906
22	1,0444	0,145798	80,822		
9	7,03597	0,076776	14,642	....5,209..	4,869
40	7,48082	0,40000	71,301		
36	21,66390	0,145798	14,295	....4,176.	4,120
71	21,47087	0,608945	58,903		
44	33,66578	0,40000	28,669	....1,193..	1,225
60	33,61660	0,47735	35,130		

41. On voit par ce petit tableau que les viteſſes à pentes égales étant ſenſiblement proportionnelles à la racine quarrée du rayon moyen, moins un dixième, on peut rapporter une expérience quelconque, c'eſt-à-dire où l'eau couloit dans tel lit que ce ſoit, à tout autre lit, dont on fixera le rayon moyen à volonté. Ce ſera le moyen de connoître plus exactement comment les viteſſes varient dans toute la ſuite des pentes que nous avons pu nous procurer, en éliminant la différence des

Digitized by Google

lits. Nous choisissons pour cela un lit dans lequel on auroit $\sqrt{r}-0,1=1$: comme cela arriveroit dans un tuyau de $4^{po.},84$ de diamètre. Cette supposition facilite beaucoup le calcul des vitesses qui conviendroient à ce rayon moyen supposé constant, en les tirant d'une expérience quelconque. Par exemple, si l'on cherche quelle vitesse auroit l'eau dans le tuyau, à une pente représentée par $\frac{1}{43,66578}$, & égale à celle de l'expérience 44eme, où la valeur de $\sqrt{r}-0,1$ est 0,4, on fera la proportion 0,4 : 1 : : $28^{po.},669$ est à un quatrième terme, qui est la vitesse cherchée, égale à 71,672 pouces. Telle est la marche que nous allons suivre, en continuant nos recherches sur la relation qu'il y a entre la vitesse & la pente.

CHAPITRE V.

Recherches sur le rapport qu'il y a entre les vitesses de l'eau & la pente de son lit.

42. SI on compare deux à deux les vitesses produites dans un même lit par des pentes différentes, on trouvera que le rapport des vitesses surpasse constamment celui des racines quartées des pentes, ou, comme nous l'avons déja dit, (27) que les vitesses croissent en plus grande raison que les racines des pentes. Plus la différence des pentes sera grande, plus les rapports dont nous parlons différeront entre eux; mais leurs différences croîtront

Digitized by Google

croîtront d'autant plus que les pentes feront déja plus grandes.

Pour rendre plus fenfibles ces vérités, que nous n'avons puifées que dans l'expérience, nous donnerons ici un tableau de comparaifon entre les viteffes & les pentes du lit, dans lequel on auroit $\sqrt{r} - 0,1 = 1$, tirées de nos propres expériences & de celles de M. l'Abbé Boffut & de M. Couplet, par la méthode expofée à la fin du chapitre précédent. Les pentes y font variées depuis $\frac{1}{1}$ jufqu'à $\frac{1}{9288}$. La première colonne indique le numéro de l'expérience rapportée dans le tableau du paragraphe 55, de laquelle on a conclu la viteffe. La feconde exprime la pente du lit. La troifième eft la racine quarrée de b, ou de l'inverfe de la pente. La quatrième eft la viteffe conclue de celle de l'expérience. La cinquième exprime la valeur de V $\sqrt{b}$, qui feroit (26) conftante, fi les réfiftances croiffoient comme le quarré des viteffes, ou fi les viteffes croiffoient comme les racines quarrées des pentes. La fixième montre les différences entre les valeurs de $\sqrt{b}$, prifes dans deux pentes confécutives ; & la feptième, les différences correfpondantes des valeurs de V $\sqrt{b}$, prifes dans les mêmes pentes.

Digitized by Google

Tableau du mouvement de l'eau dans un tuyau de 4po.,84 de diamètre, dont les pentes seroient variées depuis la verticale jusqu'a $\frac{1}{9288}$.

NUMEROS des expériences extraites du tableau, par. 55.	PENTES du tuyau, ou valeurs de $\frac{1}{b}$	VALEURS de $\sqrt{b}$, ou de la racine de l'inverse de la pente.	VALEURS de V, ou de la vitesse conclue de l'expérience.	VALEURS de $V\sqrt{b}$	DIFFÉRENCES des valeurs de $\sqrt{b}$	DIFFÉRENCES des valeurs de $V\sqrt{b}$
21	$\frac{1}{1,006424}$	1,0032	565,64	567,45		
					0,6671	po. 32,02
16	$\frac{1}{2,79005}$	1,6703	320,56	535,43		
					0,7067	30,65
39	$\frac{1}{5,65026}$	2,3770	212,36	504,78		
					1,1532	30,56
34	$\frac{1}{12,4624}$	3,5302	134,34	474,22		
					1,1034	26,16
71	$\frac{1}{21,47087}$	4,6336	96,72	448,06		
					1,3502	25,56
72	$\frac{1}{35,80824}$	5,9839	70,60	422,50		
					0,9698	13,53
62	$\frac{1}{48,33416}$	6,9537	58,81	408,97		
					1,0561	8,66
47	$\frac{1}{64,15725}$	8,0098	49,98	400,31		
					2,0416	20,59
50	$\frac{1}{101,0307}$	10,0514	37,78	379,72		
					2,4146	12,36
69	$\frac{1}{155,4015}$	12,4660	29,467	367,33		
					3,5922	18,55
54	$\frac{1}{257,8663}$	16,0582	21,723	348,78		
					21,5184	34,11
113	$\frac{1}{1412}$	37,5766	8,374	314,67		
					20,5454	10,81
83	$\frac{1}{3378,26}$	58,1220	5,228	303,86		
					5,1675	5,07
85	$\frac{1}{4003,66}$	63,2895	4,721	298,79		
					33,0845	13,97
114	$\frac{1}{9288}$	96,3740	2,955	284,82		

Digitized by Google

43. On voit par ce tableau que les valeurs de $V\sqrt{b}$, au lieu d'être conſtantes, vont toujours en croiſſant, à meſure que les viteſſes augmentent, ou que $\sqrt{b}$ diminue; & que les différences de ces valeurs ne ſont pas conſtantes non plus, mais qu'elles croiſſent de plus en plus, quand elles répondent à des valeurs de $\sqrt{b}$ qui ſont en progreſſion arithmétique. Quand les valeurs de $\sqrt{b}$ ſont déja conſidérables, & qu'elles ne diffèrent que d'une petite quantité, les différences de $V\sqrt{b}$ deviennent preſque inſenſibles; & lorſqu'au contraire les valeurs de $\sqrt{b}$ ſont petites, c'eſt-à-dire la pente très-grande, & qu'elles diffèrent ſeulement d'une unité, les valeurs correſpondantes des différences de $V\sqrt{b}$ ſont conſidérables; c'eſt-à-dire que la différence entre le rapport des viteſſes & celui des racines de leurs pentes va toujours en croiſſant avec les viteſſes.

44. Pour ſe faire une idée plus exacte de la loi que nous cherchons, repréſentons la ſuite de nos viteſſes par les ordonnées d'une courbe. Si ces viteſſes étoient comme les racines quarrées des pentes, l'équation $V = \frac{A}{\sqrt{b}}$ appartiendroit à une hyperbole équilatère NKS, entre ſes aſymptotes MA, AB; les valeurs de $\sqrt{b}$ étant repréſentées par les abciſſes ſur la ligne AB, les viteſſes le ſeroient par les ordonnées; $V\sqrt{b} = A$ repréſenteroit la puiſſance de l'hyperbole: mais puiſque les vraies viteſſes ne ſont ſenſiblement égales à $\frac{A}{\sqrt{b}}$, que Fig. 4

Digitized by Google

lorſque $\sqrt{b}$ eſt très-grand, & qu'elles ſurpaſſent de plus en plus cette valeur, à meſure que $\sqrt{b}$ diminue, on peut les exprimer par les ordonnées de la courbe PGT, qui ſe confond avec la première, à une grande diſtance de l'origine A, & s'en éloigne d'autant plus que les abciſſes communes diminuent; de ſorte que ſi AQ repréſente la valeur de $\sqrt{b}$, quand la viteſſe eſt infinie, la ligne QO eſt l'aſymptote de la nouvelle courbe; ſes ordonnées ſont égales à $\frac{A}{X}$, & celles de la première à $\frac{A}{\sqrt{b}}$. Ainſi, le rapport entre ces ordonnées, ou $\frac{\sqrt{b}}{X}$ doit être tel qu'il s'approche d'autant plus de l'unité que $\sqrt{b}$ eſt grand, & qu'il la ſurpaſſe d'autant plus que $\sqrt{b}$ diminue.

45. Pour exprimer X en fonction de $\sqrt{b}$, de manière à remplir ces conditions, on voit d'abord en général que X doit être plus petit que $\sqrt{b}$, & ne doit être égal à aucune de ſes puiſſances fractionnaires; car alors le rapport $\frac{\sqrt{b}}{X}$ différeroit d'autant plus de l'unité, que $\sqrt{b}$ ſeroit plus grand. Si l'on fait $X = q\sqrt{b}$, q étant un nombre fractionnaire, conſtant ou variable, ſuivant quelque puiſſance de $\sqrt{b}$, on trouvera encore le même défaut. En faiſant $X = \sqrt{b} - K$, prenant K pour un nombre conſtant, on ſatisfait aſſez bien à la première condition; mais K doit être très-petit, afin que X ne devienne zéro qu'à une très-petite valeur de $\sqrt{b}$; & on voit, d'après l'expérience, que le

Digitized by Google

rapport $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-K}$ n'augmente pas assez dans certaines pentes, lorsque K est moindre que l'unité, & que cette quantité doit nécessairement être variable. Si on prend pour K une puissance fractionnaire de $\sqrt{b}$, il arrivera que $X = 0$ lorsque $\sqrt{b} = 1$, ce qui est encore contraire à l'expérience. On voit donc qu'aucun exposant constant ne peut donner la valeur de X en fonction de $\sqrt{b}$; il faut que cet exposant soit variable, ce qui ramène à une loi logarithmique, & paroît s'accorder avec l'observation précédente, (43) que la loi générale n'est suivie qu'en comparant des abcisses ou des valeurs de $\sqrt{b}$, qui soient en progression arithmétique. Nous avons d'abord essayé de faire $K = L.\sqrt{b}$, ou $X = \sqrt{b} - L.\sqrt{b}$; & en effet, plus un nombre est grand, moins il est diminué par la soustraction de son logarithme : ainsi, $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b}}$ s'approche d'autant plus de l'unité, que $\sqrt{b}$ est plus grand; la formule devient alors $V = \frac{A}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b}}$. En comparant cette formule avec les résultats de l'expérience, il s'y trouve un accord singulier, depuis les plus petites pentes jusqu'à celles de $\frac{1}{20}$, qui est la plus grande que M. l'Abbé Bossut ait employée dans ses tuyaux, & qui excède même les bornes ordinaires de la pratique : mais quand la pente devient plus grande, on trouve que les vitesses calculées sont au dessous de celles de l'expérience,

Digitized by Google

& d'autant plus que la pente s'approche de la verticale ; & il reste à desirer que la formule devienne générale, pour embrasser tous les cas. Comme la théorie devient ici insuffisante, l'expérience seule a pu nous indiquer la vraie valeur de X. Elle doit être telle que, pour la pente verticale, elle donne les vitesses presque doubles de celles que donneroit la formule $V = \frac{A}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b}}$, comme nous le ferons voir par la suite, & comme ou le remarque déja dans le tableau précédent. C'est aussi l'expérience qui a indiqué le module du logarithme de $\sqrt{b}$. La relation qu'il y a entre la courbe des vitesses & l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, nous a induits à essayer les logarithmes hyperboliques, & nous avons trouvé qu'en effet ils étoient les seuls qui convinssent avec l'expérience. On sait qu'on les obtient en multipliant ceux des tables par le nombre 2,302585, ou simplement par 2,3, ce qui est suffisant pour notre objet. Nous allons continuer nos recherches pour perfectionner la formule.

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

Suite des recherches pour rendre générale la formule du mouvement uniforme. Effets de la viſcoſité de l'eau.

46. PUISQUE la formule $V = \frac{A}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b}}$ s'accorde avec l'expérience dans tous les cas où la pente n'eſt pas plus grande que $\frac{1}{20}$, & qu'elle donne de trop petites viteſſes, quand la pente devient plus grande, nous avons dû conclure qu'il s'y trouvoit quelque quantité négligée, dont l'influence n'étoit ſenſible que pour de petites valeurs de $\sqrt{b}$. Nous avons vu en effet que le rapport $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b}}$ doit augmenter juſqu'à l'infini, à meſure que $\sqrt{b}$ diminue. Cependant ſi l'on fait $\sqrt{b} = 1$, la quantité totale ſe réduira auſſi à l'unité; elle ſera encore moindre ſi on fait $\sqrt{b}$ plus petit; & ſi on cherche ſon *maximum*, on verra qu'il répond à $L.\sqrt{b} = 1$. Alors le rapport eſt $\frac{2,71828}{1,71828}$, mais au-delà de ce terme il diminue.

Les expériences faites avec des petits tuyaux de verre nous avoient déja fait connoître, beaucoup plus parfaitement que les autres, la vraie relation entre la viteſſe & les rayons moyens; elles nous ont encore été très-utiles pour connoître le rapport des viteſſes dans les grandes pentes, par

Div

Digitized by Google

la facilité d'incliner ces tuyaux à volonté, & de diminuer les valeurs de $\sqrt{b}$ jusqu'à l'unité, & même au-delà. Elles nous ont donc fait connoître que la formule $V = \frac{A}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b}}$ donnoit les vitesses trop petites.

Pour corriger cette expression, au lieu de $L.\sqrt{b}$ nous avons essayé $L.\sqrt{b+c}$, en nommant c une quantité assez petite pour ne pas influer sensiblement sur les vitesses, quand la pente est moindre que $\frac{1}{20}$. Mais avant de déterminer sa valeur d'après l'expérience, il est bon d'examiner si quelqu'une de ces valeurs peut satisfaire aux conditions générales que nous cherchons à remplir.

47. En représentant b par x, le rapport $\frac{\sqrt{b}}{x}$ qui doit toujours augmenter, quand $\sqrt{b}$ diminue, sera $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - L.\sqrt{x+c}}$. Supposons que cette quantité représente les ordonnées y d'une courbe quelconque, dont x soit l'abcisse, en sorte qu'on ait $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - L.\sqrt{x+c}}$. Pour que les ordonnées aillent toujours en croissant, il faut que cette courbe soit telle qu'en aucun point elle ne soit parallèle aux abcisses. Ainsi, toute valeur de c qui pourroit rendre y un *maximum* ou un *minimum*, devra être rejetée. Il faut au contraire que cette valeur rende la courbe continue, sans inflexion, & qu'elle s'éloigne de l'abcisse à une distance infinie, avant que x soit réduit à zéro.

Digitized by Google

En différenciant l'équation $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \text{L.}\sqrt{x+c}}$, & faisant $dy = 0$, on aura celle-ci $\text{L.}(x+c) = \frac{2x}{x+c}$, qui indique tous les points ou la courbe est parallèle aux abcisses, & qui dépendent des différentes valeurs qu'on peut donner à c. Si on suppose cette quantité égale à 0, on aura $\text{L.}\,x = 2$, ou $x = 7{,}389$, comme nous l'avons trouvé tout-à-l'heure (46). En faisant $c = 1$, l'équation $\text{L.}(x+1) = \frac{2x}{x+1}$ donne à x deux valeurs, qui sont environ 4 & 0, la première pour le *maximum* de l'ordonnée, & l'autre pour le *minimum*. Si $c = 1{,}2$, le résultat est semblable, mais les points du *maximum* & du *minimum* se rappochent, & répondent à-peu-près aux valeurs de $x = 2{,}95$ & $0{,}313$. Ces deux points de la courbe, parallèles aux abcisses, se rapprochent encore si on augmente un peu la valeur de c, & se réunissent enfin en un seul point qui répond à $x = 1$, lorsque $c = 1{,}35$ environ : au-delà de ce terme l'équation est imaginaire, parce que les ordonnées allant toujours en croissant, on ne peut pas supposer $dy = 0$. Ainsi, pour que la constante c puisse convenir à la formule, il faut qu'on ait $c > 1{,}35$.

48. En consultant l'expérience jusqu'à des valeurs de $\sqrt{b}$ moindres que l'unité, on trouve qu'en effet c peut être supposé une quantité constante,

Digitized by Google

& égale à 1,6 ; & ainsi la formule $V = \frac{A}{X}$ devient

$$V = \frac{\sqrt{ng}(\sqrt{b} - 0,1)}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}}.$$

On peut remarquer que l'addition de la quantité c ne devient sensible qu'à de petites valeurs de b ; car si on prend $b = 20$, les valeurs de $\sqrt{b} - L.\sqrt{b}$, & de $\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}$ ne diffèrent que d'environ $\frac{1}{90}$, & cette différence est encore bien moindre à une pente plus petite. Ainsi, sans rien changer aux résultats qui s'accordoient si bien avec l'expérience jusqu'à la pente $\frac{1}{20}$, nous avons trouvé la loi générale qui répond aux plus grands & aux plus petits rapports entre la vitesse & la résistance.

Dans la pratique, on ne produit ordinairement dans un tuyau que des vitesses très-bornées : ainsi, la connoissance de celles qui répondent à de très-petites valeurs de b, est de pure spéculation; cependant elle n'en est pas moins précieuse pour ceux qui, en observant la nature, n'examinent pas seulement ce qu'elle produit, mais aussi ce qu'elle peut produire. Le calcul présente la loi dans toute son extension. Veut-on, par exemple, connoître la résistance qui résulte d'une vitesse infinie, on verra qu'il faut qu'on ait $\sqrt{b} = L.\sqrt{b+1,6}$: or, cette équation a lieu lorsque $b =$ 0,064977 environ. En effet, $\sqrt{b}$ ou $\sqrt{0,064977}$ est égal à 0,254905, & le logarithme des tables de $\sqrt{0,064977} + 1,6$ étant 0,1107041, si on le

Digitized by Google

multiplie par 2,302585, pour le rendre hyperbolique, on a de même L. $\sqrt{b+1,6} = 0,254905$: ainsi, lorsque la vitesse est infinie, la résistance est à-peu-près égale à $\frac{1}{0,064977}$, ou 15,39 fois le poids de la colonne d'eau en mouvement, abstraction faite de la résistance que l'air opposeroit à sa sortie : car nous aurons occasion de remarquer que l'air oppose une résistance considérable à une colonne d'eau qui sort d'un vase ou d'un tuyau avec une très-grande vitesse ; cet effet commence à devenir sensible, quand la vitesse est produite par une chute de 3 à 4 pieds.

49. Après avoir déterminé comment le frottement, l'adhésion de l'eau aux parois, & la communication de l'inertie du lit à toute la masse mue, influoient sur la résistance, il ne reste plus à examiner qu'un élément, qui n'est sensible que dans les petites vitesses, sur-tout quand les lits sont considérables.

La viscosité de l'eau, ou l'adhérence que ses particules ont entre elles, occasionne une résistance très-petite, mais finie, qui s'oppose sans cesse à leur séparation : or, il ne peut y avoir de mouvement uniforme dans l'eau, sans que ses filets ne prennent différentes vitesses, selon qu'ils sont plus ou moins proches de la paroi, qui retarde & rend uniforme le mouvement de toute la masse. Cette inégalité de vitesses ne peut avoir lieu sans une séparation mutuelle des parties contigues. La viscosité, ou, si l'on veut, la force

Digitized by Google

avec laquelle ces parties s'attirent, s'oppose à cette séparation; il faut donc qu'il y ait constamment une partie de la force accélératrice destinée à vaincre cette résistance; & lorsque la force accélératrice est assez petite pour lui être seulement égale, le mouvement doit cesser, quoique la pente soit finie. S'il existoit un fluide dont les parties n'eussent aucune adhérence entre elles, la plus petite pente possible suffiroit pour lui imprimer un mouvement; mais les différens liquides connus éprouvant plus ou moins l'effet de la viscosité, la pente à laquelle ils commencent à couler est d'autant plus grande que l'adhérence de leurs parties les éloigne moins de la nature des solides. Cet élément est donc variable, suivant la différence des fluides, & il s'agit seulement ici d'en fixer la valeur relativement à l'eau.

50. La résistance que deux molécules opposent à leur séparation doit dépendre de la vitesse avec laquelle elles se séparent; mais pour peu que la vitesse moyenne d'un courant d'eau soit sensible, l'excès de la vitesse d'une molécule sur celle de la molécule voisine, qui constitue réellement la vitesse de séparation, est toujours très-petit, & peut être pris pour une quantité constante, sans craindre d'erreur sensible.

Les expériences du paragraphe 389, & la table que nous donnerons ci-après, (67) font voir que la différence des vitesses des filets d'eau de la surface & du fond, ou des vitesses dans l'axe d'un

Digitized by Google

tuyau & à ſa paroi, ne croiſſent pas comme les viteſſes, mais comme les racines quarrées des viteſſes moyennes à très-peu près. Ainſi, la viteſſe réelle de ſéparation des molécules dans un même lit croît à peu près dans le même rapport; mais elle reſte toujours infiniment petite, parce que l'excès des deux viteſſes dont nous parlons doit être réparti ſur tout le nombre des molécules qui ſe trouvent dans le rayon du tuyau, ou dans la profondeur du courant.

Ainſi, nous ſuppoſerons qu'il y a ſans ceſſe une partie de la force accélératrice employée à vaincre cette réſiſtance, & que le mouvement s'anéantit, quand ces deux forces ſe font équilibre.

Suppoſons donc que $\frac{1}{B}$ ſoit la très-petite pente relative à cette partie de la force accélératrice; ſi elle n'étoit pas employée à vaincre une réſiſtance, elle produiroit une viteſſe qui eſt réellement perdue; de ſorte qu'en raiſonnant pour celle-ci comme pour la viteſſe réelle, ſa valeur ſera $\frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{B}-L.\sqrt{B}}$, quantité qu'il faudra toujours retrancher de la viteſſe que nous avons déterminée. Ainſi, l'expreſſion de la viteſſe moyenne devient réellement $V=\frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}}-\frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{B}-L.\sqrt{B}}$

$$=(\sqrt{r}-0,1)\left(\frac{\sqrt{ng}}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}}-\frac{\sqrt{ng}}{\sqrt{B}-L.\sqrt{B}}\right);$$

mais comme le terme $\frac{\sqrt{ng}}{\sqrt{B}-L.\sqrt{B}}$ n'eſt compoſé

que de quantités conſtantes, on peut l'évaluer en un ſeul nombre.

La détermination exacte de cette quantité exigeroit des expériences très-délicates, & nous n'avons pu obtenir à cet égard qu'une ſimple eſtimation, qui ſera cependant très-ſuffiſante pour la pratique. En combinant toutes les expériences, nous avons vu qu'on peut faire $\frac{\sqrt{ng}}{\sqrt{B}-L.\sqrt{B}} = \sqrt{0^{po.},09} = 0^{po.},3$ environ.

CHAPITRE VII.

Formule générale des viteſſes moyennes uniformes de l'eau dans un lit quelconque. Analyſe de cette formule. Cauſe de l'anéantiſſement de la viteſſe. Réſumé des principes.

51. D'APRÈS toutes les conſidérations précédentes, puiſées dans la nature, appuyées par le raiſonnement, & autoriſées par l'expérience, nous ſommes en état de conclure la formule complète du mouvement uniforme de l'eau, eu égard à tous les élémens que nous avons pu appercevoir.

Soient donc nommées :

V. La viteſſe moyenne, uniforme par ſeconde, exprimée en pouces, d'un courant quelcon-

Digitized by Google

que, contenu dans un lit, dont la ſection & la pente ſont conſtans, & la longueur indéfinie.

r. Le rayon moyen, c'eſt-à-dire le quotient de la ſection du lit, exprimée en pouces quarrés, diviſée par ſa paroi, exprimée en pouces linéaires : dans les lits circulaires, ce rayon moyen eſt toujours exprimé par le quart du diamètre.

n. Un nombre abſtrait & conſtant, que l'expérience donne égal à 243,7.

g. La viteſſe acquiſe à la fin d'une ſeconde, par un corps grave qui tombe librement ; on ſait qu'elle eſt égale à 362 pouces.

b. Le dénominateur de la fraction, qui exprime la pente du lit ou de la ſurface de l'eau, en ſuppoſant le numérateur égal à l'unité : ainſi, une pente d'un pouce ſur mille eſt $\frac{1}{1000}$, & $b = 1000$.

c. Un nombre abſtrait & conſtant, que l'expérience donne égal à 1,6 ou $\frac{16}{10}$.

On aura $V = \frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+c}} - 0,3(\sqrt{r}-0,1)$;

ou en nombres, $V = \frac{297(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}} - 0,3$ $(\sqrt{r}-0,1)$.

52. Cette formule étant compoſée de pluſieurs quantités abſtraites & concrètes, il n'eſt pas inutile de les diſtinguer, pour voir ce qu'elle deviendroit, ſi on prenoit toute autre unité que le pouce.

Digitized by Google

La viteſſe étant l'eſpace parcouru pendant une ſeconde, peut être repréſentée par une ligne compoſée de pouces, de pieds ou de toiſes, & ſon expreſſion doit être de même eſpèce.

On a déja vu que n eſt un nombre abſtrait, g & r ſont des lignes dont l'expreſſion doit être de même eſpèce que celle de la viteſſe.

La quantité 0,1 eſt de même nature que $\sqrt{r}$; car ſon quarré $0^{po.}$,01 eſt le rayon moyen d'un lit, dans lequel l'attraction des bords fait équilibre à la force accélératrice; par conſéquent le numérateur du premier terme de la formule eſt une ligne.

Les quantités du dénominateur ſont abſtraites, puiſque b exprime toujours le nombre de fois que la hauteur du plan incliné eſt contenue dans ſa longueur, ou le nombre de fois que le poids qui fait équilibre à la réſiſtance eſt contenu dans le poids abſolu de la colonne qui ſe meut.

On voit de même que le deuxième terme $0,3(\sqrt{r}-0,1)$ eſt une quantité linéaire.

Si donc on prenoit le pied pour unité, il faudroit diviſer par $\sqrt{12}$ les quantités $\sqrt{362}$; 0,1 & 0,3, & la formule ſeroit $V = \frac{85,7(\sqrt{r}-0,02887)}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}} - 0,0866(\sqrt{r}-0,02887)$.

Le pied de Londres eſt à celui de Paris : : 1000 : 1068. Ainſi, un grave parcourt en tombant, pendant la première ſeconde, 193,3 pouces de Londres; & g vaut dans ce cas 386,6 : on auroit donc

donc $\sqrt{ng} = 307$, à peu de chose près. Ainsi, la formule angloise de la vitesse exprimée en pouces seroit $V = \frac{307(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}} - 0,3\,(\sqrt{r}-0,1)$, en négligeant la petite variation des quantités 0,1 & 0,3.

53. Notre formule rend raison des causes qui peuvent anéantir la vitesse, quoique l'eau ait encore une pente ou une force accélératrice; car l'eau peut cesser de couler, 1°. quand $\sqrt{r}$ devient égal à 0,1, ce qui a lieu dans un tuyau dont le diamètre a un peu moins d'une demi ligne. Ce tube est alors si capillaire que l'attraction des parois s'oppose au cours uniforme de l'eau; il faut des secousses pour l'obliger à s'y mouvoir, quelque charge qu'on lui donne; & on sait même que sans aucune charge l'attraction seule fait élever l'eau dans ces sortes de tubes : ainsi les résultats théoriques s'arrêtent au point où la loi générale ne peut plus avoir lieu. On pourroit même s'étonner d'une si grande précision, puisqu'ayant fait couler de l'eau dans un tube dont nous avions estimé que le diamètre étoit de $\frac{2}{3}$ de ligne, & l'ayant ensuite calculé par la formule, d'après sa dépense, sa charge & sa longueur, nous avons trouvé qu'il étoit de 0,664 li. (expériences 1 & 2 du tableau § 55.)

2°. La seconde cause qui annulle la vitesse, est la petitesse de la pente, c'est-à-dire que l'eau cesse de couler, quand les deux termes de la valeur de

V ſont égaux, ou qu'on a ſimplement $\frac{297}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b}}$ $= 0,3$. Ce réſultat a lieu quand la pente eſt d'environ un millionième, ſauf l'erreur qu'il peut y avoir dans l'évaluation de la quantité 0,3 ; erreur qui ne pourroit être qu'en moins, dans ce cas. Ainſi, on pourroit croire que la plus petite pente qu'on puiſſe donner à un canal, pour que la viteſſe y ſoit ſenſible, ſeroit $\frac{1}{500000}$, en doublant la précédente, ce qui reviendroit à-peu-près à $\frac{1}{6}$ de ligne par cent toiſes. On voit par là quel fonds on doit faire ſur les principes d'après leſquels quelques Hydrauliciens ont fixé la pente dont nous parlons à $\frac{1}{7200}$, ou à un pouce pour 100 toiſes, & même davantage : Si notre théorie ne les oblige pas à changer leur eſtimation, ils ſe rendront peut-être du moins à l'evidence de nos expériences, où nous nous ſommes aſſurés que l'eau avoit 6 pouces de viteſſe dans notre canal factice, fixé à une pente de $\frac{1}{9288}$; 7 pouces de viteſſe dans un canal de deſſechement, près de Condé, dont la pente étoit de $\frac{1}{27000}$; & enfin 10 pouces de viteſſe dans la rivière de la Hayne, avec une pente de $\frac{1}{33000}$.

On ne peut pas raiſonner contre des faits, mais il faut cependant avouer qu'il eſt très difficile de fixer quelque choſe de poſitif à cet égard. Car quoique le mouvement puiſſe s'anéantir à la même pente, pour toutes ſortes de lits, il n'en eſt pas de même quand il s'agit d'une viteſſe ſenſible, comme ſeroit celle d'un pouce par ſeconde. Dans

Digitized by Google

ce cas, la pente dépend néceſſairement de la grandeur du lit. Si on cherchoit par exemple la pente que devroit avoir un canal de deſſéchement, pour couler avec une viteſſe moyenne d'un pouce par ſeconde, en ſuppoſant qu'il fût de figure trapèze, dont la largeur à la ſurface de l'eau fût de 20 pieds, celle du fond de 14, & la profondeur de l'eau de 3 pieds, en ſorte qu'il dépenſât 7344 pouces cubes ou $4\frac{1}{4}$ pieds cubes par ſeconde, on trouveroit par la formule que ſa pente devroit être de $\frac{1}{367236}$.

On pourroit peut-être nous oppoſer une expérience de M. l'Abbé Boſſut, qui paroît d'abord détruire nos principes, & qui cependant les confirme. Ayant donné une charge de ſeize lignes au deſſus du point le plus bas de la paroi de deux tuyaux horizontaux, dont les diamètres étoient de ſeize lignes & de deux pouces, l'eau qu'on a reçue à 180 pieds de diſtance, ne couloit plus que goutte à goutte ; d'où il ſemble qu'on pourroit conclure que pour obtenir un mouvement continu, il faut à l'eau une pente de 20 lignes ſur 180 pieds, ou de $\frac{1}{1296}$. Mais on doit remarquer que, le tuyau étant horizontal, l'eau ne pouvoit y couler, ſans diminuer ſa ſection ; & lorſque cette ſection étoit moindre que le demi cercle, la diminution du rayon moyen occaſionnoit celle de la viteſſe. Ces deux effets devenoient plus ſenſibles, à meſure que la première eau cheminoit le long du tuyau ; & enfin la ſection ſe réduiſoit à un tel point, pour acquérir de la pente, que $\sqrt{r}$ devenoit à-peu-près

Digitized by Google

égal à 0,1, ce qui anéantiſſoit le mouvement. Ainſi, la ceſſation du mouvement ne doit pas, dans ce cas, être attribuée à la petiteſſe de la pente, mais à celle de la ſection. Le réſultat eût été bien différent, ſi l'eau eût rempli toute la capacité du tuyau; & l'on voit en effet par nos expériences qu'un tuyau d'un pouce de diamètre, qui dégorgeoit ſous l'eau d'un baſſin, & qui couloit par conſéquent tres-plein, donnoit une viteſſe de plus d'un pouce & demi, quoi qu'il n'eût qu'une pente de $\frac{1}{5000}$.

54. Avant de faire la comparaiſon des réſultats de l'expérience avec la théorie, par le tableau général que nous avons annoncé, il eſt bon de rappeler en peu de mots les principes qui ont ſervi de baſe à notre formule, pour les raſſembler ſous un ſeul point de vue. 1°. On peut ſuppoſer que les molécules de l'eau ſont des corps d'une ténuité inimaginable, parfaitement ſphériques, durs & polis. Dans un tel ſyſtême de corpuſcules, la preſſion ne peut influer ſur le frottement.

2°. Les rivières ne peuvent couler ſans une pente à leur ſurface, & c'eſt la force qui en réſulte qui eſt le ſeul agent de leur mouvement.

3°. Lorſque la viteſſe moyenne d'une eau courante eſt uniforme, la force accélératrice fait équilibre à la réſiſtance des bords. Les tuyaux à cet égard ſont ſemblables aux rivières, pourvu qu'on retranche de la hauteur entière du réſervoir la hauteur due à la viteſſe, & qu'on conſidère le

Digitized by Google

reſte comme une pente ſur toute la longueur du tuyau : ainſi, le poids abſolu de la colonne employée à vaincre la réſiſtance eſt égal à celui de la colonne de même diamètre qui ſe meut, multiplié par la pente $\frac{1}{b}$. Quand cette quantité excède l'unité dans le mouvement de l'eau contenue dans les tuyaux, elle n'exprime qu'une pente imaginaire, mais elle repréſente toujours le rapport des deux poids.

4°. Les molécules d'eau s'introduiſent dans les pores de la paroi, & rempliſſent toutes les petites cavités de ſa ſuperficie. Ainſi, elles forment elles-mêmes la ſurface ſur laquelle toute la maſſe doit couler; d'où il ſuit que les différentes matières dont les parois peuvent être compoſées, ne changent pas ſenſiblement l'intenſité de la réſiſtance.

5°. La ſurface des parois mouillées eſt un aſſemblage de globules, ſur leſquels coulent les autres particules mobiles, d'où il réſulte une réſiſtance proportionnelle au quarré des viteſſes, quand l'engrenage des molécules eſt complet, c'eſt-à-dire dans les petites viteſſes : mais comme cet engrenage diminue à meſure que les viteſſes augmentent, la réſiſtance devient pour ainſi dire nulle, à proportion de la viteſſe, quand celle-ci devient infinie. D'après ce principe & l'expérience, la relation entre la viteſſe & la pente eſt exprimée dans un même lit par $V = \frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}}$.

6°. La réſiſtance que les molécules éprouvent

Digitized by Google

ſur la paroi ſe communique à toute la maſſe, & celle qui en réſulte pour chaque molécule eſt en raiſon directe de la paroi, & inverſe de la ſection; d'où il ſuit qu'à même pente les viteſſes ſeroient comme les racines quarrées du rapport de la ſection à la paroi, que nous nommons *rayon moyen*, ſi ce rapport n'étoit pas altéré par l'attraction des parois ſur les molécules voiſines, qui s'étend à la même diſtance dans tous les lits, & l'expérience donne $\sqrt{m} = \sqrt{n}(\sqrt{r} - 0,1)$, & $\sqrt{ng} = 297$.

7°. Chaque molécule éprouvant une réſiſtance relative à ſa diſtance à la paroi, les viteſſes particulières doivent varier avec ces diſtances, & les molécules ſe ſéparer continuellement. Une partie de la force accélératrice eſt conſtamment employée à vaincre l'adhéſion réciproque, qui s'oppoſe à cette ſéparation. La viteſſe perdue qui réſulte de cet effet eſt égale ſuivant l'expérience à $0,3(\sqrt{r} - 0,1)$.

8°. Parmi les différentes viteſſes des molécules, il en eſt une moyenne entre toutes les autres, & qui doit varier ſuivant la même loi. C'eſt celle que nous avons conſidérée dans la formule comme la ſeule qui ſoit relative à la dépenſe; & ſa valeur générale eſt $V = \frac{297(\sqrt{r} - 0,1)}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b} + 1,6} - 0,3(\sqrt{r} - 0,1)$.

Digitized by Google

CHAPITRE VIII.

Accord de l'expérience & de la théorie ſur le mouvement uniforme des eaux.

55. CE n'eſt pas aſſez d'avoir cherché à fonder une théorie expérimentale ſur la nature de l'eau, & ſur celle du mouvement uniforme; il faut encore montrer par le fait que cette théorie s'accorde avec les effets naturels obſervés ci-devant par les meilleurs Hydrauliciens, & en dernier lieu par nous-mêmes. Par là, non ſeulement nous éviterons le ſoupçon d'avoir fait cadrer nos expériences à notre théorie; mais nous aurons l'avantage de préſenter un enſemble frappant par la variété des lits & des pentes, dans leſquels le mouvement de l'eau a été obſervé. On a eu ſoin de marquer dans deux colonnes contigues les viteſſes trouvées immédiatement par l'expérience, & celles qui ont été calculées par la formule précédente.

Nous avons ordonné le tableau ſuivant, depuis les plus petits rayons moyens juſqu'aux plus grands, & commençant, pour chaque lit, par les plus grandes pentes; ce qui ramène toujours vers les lits & les pentes les plus en uſage. Il ne faut pas oublier que la pente dans les tuyaux a été calculée en diviſant la longueur du tuyau par la hauteur entière du réſervoir, après en avoir retranché

Digitized by Google

celle qui eſt due à la viteſſe calculée. Ce quotient a donné la valeur de *b*.

On ſait que la hauteur du réſervoir eſt la différence de niveau entre la ſurface ſupérieure de la charge & le centre de l'orifice de ſortie du tuyau. La hauteur due à la viteſſe a été calculée, en diviſant le quarré de la viteſſe exprimée en pouces quarrés par 478, eu égard à la contraction (198); & la viteſſe d'expérience, en diviſant la dépenſe par ſeconde, exprimée en pouces cubes, par la ſection exprimée en pouces quarrés.

Tableau comparatif des réſultats de l'expérience & de la théorie ſur le mouvement uniforme des eaux.

	Longueurs des tuyaux.	Hauteurs du réſervoir.	Valeurs de *b*.	Viteſſes d'expérience.	Viteſſes calculées.
Tuyau vertical de $\frac{2}{3}$ de ligne de diamètre. $\sqrt{r} = 0,117851$.					
ere.	po.	po.		po.	po.
1	12	16,166	0,75636	11,704	12,006
2	12	13,125	0,9307	9,753	10,576
Tuyau vertical de 1$^{li.}$,5 de diamètre. $\sqrt{r} = 0,176776$.					
3	34,166	42,166	0,9062	45,468	46,210
4	id.	38,333	0,9951	43,156	43,721
5	id.	36,666	1,0396	42,385	42,612
6	id.	35,333	1,07805	41,614	41,714

Digitized by Google

	Longueurs des tuyaux.	Hauteurs du réservoir.	Valeurs de *h*.	Vitesses d'expérience.	Vitesses calculées.
			Même tuyau horizontal.		
	po.	po.		po.	po.
7	id.	14,583	2,5838	26,202	25,523
8	id.	9,292	4,0367	21,064	19,882
9	id.	5,292	7,03597	14,642	14,447
10	id.	2,083	17,6378	7,320	8,351
	Tuyau vertical de deux lignes de diamètre. $\sqrt{r} = 0,204124$.				
11	36,25	51,250	0,854509	64,373	64,945
12	id.	45,250	0,963382	59,605	60,428
13	id.	41,916	1,038080	57,220	57,838
14	id.	38,750	1,120473	54,186	55,321
	Même tuyau incliné à la pente $\frac{1}{1,3024}$.				
15	id.	33,500	1,291741	51,151	50,983
	Même tuyau horizontal.				
16	id.	15,292	2,79005	33,378	33,167
17	id.	8,875	4,76076	25,430	24,553
18	36,25	5,292	7,89587	19,940	18,313
19	id.	2,042	20,016366	10,620	10,492
	Tuyau vertical de $2^{li},9$ *de diamètre.* $\sqrt{r} = 0,245798$.				
20	36,25	53,250	0,952348	85,769	85,201
21	id.	50,250	1,006424	82,471	82,461
22	id.	48,333	1,044400	81,646	80,698
23	id.	48,333	1,044400	79,998	
24	id.	47,916	1,052952	81,027	80,318
25	id.	44,750	1,124052	76,079	77,318
26	id.	41,250	1,215688	73,811	73,904
	Même tuyau incliné à la pente $\frac{1}{1,3024}$.				
27	id.	37,500	1,332332	70,822	70,138

Digitized by Google

	Longueurs des tuyaux.	Hauteurs du réservoir.	Valeurs de *b*.	Vitesses d'expérience.	Vitesses calculées.
		Même tuyau horizontal.			
	po.	po.		po.	po.
28	id.	20,166	2,43034	51,956	50,140
29	id.	9,083	5,26858	33,577	32,442
30	id.	7,361	6,45035	28,658	28,801
31	id.	5,000	9,357302	23,401	23,195
32	id.	4,916	9,509718	22,989	22,974
33	id.	4,833	9,665223	22,679	22,754
34	id.	3,708	12,4624	19,587	19,550
35	id.	2,713	16,8135	16,631	16,324
36	id.	2,083	21,6639	14,295	14,003
37	id.	1,625	27,5102	12,680	12,115
38	id.	0,833	52,3427	7,577	8,215
		** Tuyaux sensiblement horizontaux; diamètre 1 pouce.* $\sqrt{r}=0,5$.			
39	117	36,000	5,65026	84,945	85,524
40	117	26,666	7,48002	71,301	72,617
41*	138,5	20,950	10,32149	58,808	60,034
42	117	18,000	10,78798	58,310	58,472
43*	138,5	6,000	33,19623	29,341	29,663
44*	737	23,700	33,66578	28,669	29,412
45	id.	14,600	54,26340	21,856	22,056
46	id.	13,700	57,77718	20,970	21,240
47	id.	12,320	64,15725	19,991	19,950
48	737	8,960	87,86790	16,625	16,543
49*	id.	8,960		16,284	
50*	id.	7,780	101,0309	15,112	15,232
51*	id.	5,930	132,1617	13,315	13,005
52*	id.	4,200	186,0037	10,671	10,656
53*	id.	4,200		10,441	
54*	138,5	0,700	257,8663	8,689	8,824
55*	737	0,500	1540,76	3,623	3,218
56	737	0,150	5113,42	1,589	1,647

* Dans les expériences marquées d'un astérique, le tuyau dégorgeoit sous l'eau; dans toutes les autres il dégorgeoit en l'air.

Digitized by Google

	Longueurs des tuyaux.	Hauteurs du réservoir.	Valeurs de *b*.	Vitesses d'expérience.	Vitesses calculées.

Expériences de M. l'Abbé Bossut.

Tuyau horizontal; diam. 1 pouce. $\sqrt{r}=0,5$.

	po.	po.		po.	po.
57	600	12	54,5966	22,282	21,975
58	600	4	161,3120	12,223	11,756

Tuyau horizontal; diam. 16 lignes. $\sqrt{r}=0,57735$.

59	360	24	19,0781	48,534	49,515
60	720	24	33,6166	34,473	35,130
61	360	12	37,0828	33,160	33,106
62	1080	24	48,35416	28,075	28,211
63	1440	24	63,1806	24,004	24,028
64	720	12	66,3020	23,360	23,345
65	1800	24	78,05318	21,032	21,182
66	2160	24	92,9474	18,896	19,096
67	1080	12	95,87557	18,943	18,749
68	1440	12	125,6007	16,128	15,991
69	1800	12	155,4015	14,066	14,119
70	2160	12	185,2487	12,562	12,750

Tuyau horizontal; diam. 2po.,01 $\sqrt{r}=0,7089458$.

71	360	24	21,47087	58,503	58,803
72	720	24	35,80824	43,000	43,136
73	360	12	41,27586	40,322	39,587
74	1080	24	50,41193	35,765	35,096
75	1440	24	65,1448	30,896	30,096
76	720	12	70,14263	29,215	28,796
77	1800	24	79,94866	27,470	26,639
78	2160	24	94,79006	24,731	24,079
79	1080	12	99,4979	23,806	23,400
80	1440	12	129,0727	20,707	20,076
81	1800	12	158,75116	18,304	17,788
82	2160	12	188,5179	16,377	16,097

Digitized by Google

	Longueurs des tuyaux.	Hauteurs du réservoir.	Valeurs de *b*.	Vitesses d'expérience.	Vitesses calculées.
	Expériences de M. Couplet sur des conduites d'eau.				
	Tuyau de 5 pouces de diam. $\sqrt{r} = 1,118034$.				
	po.	po.		po.	po.
83	84240	25,000	3378,26	5,323	5,287
84	id.	24,000	3518,98	5,213	5,168
85	id.	21,083	4005,66	4,806	4,807
86	id.	16,750	5041,61	4,127	4,225
87	id.	11,333	7450,42	3,154	3,388
88	id.	5,583	15119,96	2,0107	2,2535
	Tuyau de 18 pouces de diam. $\sqrt{r} = 2,12132$.				
89	43200	145,083	304,9734	39,159	40,510

Expériences sur le canal factice.

	Sections du canal.	Parois du canal.	Valeurs de $\sqrt{r}$.	Valeurs de *b*.	Vitesses moyennes d'expérience.	Vitesses moyennes calculées.
	Canal trapèze.					
90	18,84	13,06	1,20107	212	27,51	27,19
91	50,60	29,50	1,3096	212	28,92	29,88
92	83,43	26,00	1,7913	412	27,14	28,55
93	27,20	15,31	1,33290	427	18,28	20,39
94	39,36	18,13	1,47342	427	20,30	22,71
95	50,44	20,37	1,57359	id.	22,37	24,37
96	56,43	21,50	1,62007	id.	23,54	25,14
97	98,74	28,25	1,86955	432	28,29	29,06
98	100,74	28,53	1,87910	id.	28,52	29,23
99	119,58	31,06	1,96219	id.	30,16	30,60
100	126,20	31,91	1,98868	id.	31,58	31,03
101	130,71	32,47	2,00637	id.	31,89	31,32
102	135,32	33,03	2,02407	id.	32,52	31,61
103	20,83	13,62	1,23667	1728	8,94	8,58
104	34,37	17,00	1,42188	id.	9,71	9,98
105	36,77	17,56	1,44708	id.	11,45	10,17
106	42,01	18,69	1,49924	id.	12,34	10,53

Digitized by Google

	Sections du canal.	Parois du canal.	Valeurs de $\sqrt{r}$.	Valeurs de b.	Vitesses moyennes d'expérience.	Vitesses moyennes calculées.
			Canal rectangulaire.			
107	34,59	21,25	1,27418	458	20,24	18,66
108	86,25	27,25	1,77908	458	28,29	26,69
109	34,50	21,25	1,27418	929	13,56	12,53
110	35,22	21,33	1,28499	1412	9,20	10,01
111	51,75	23,25	1,49191	id.	12,10	11,76
112	76,19	26,08	1,70921	id.	14,17	13,59
113	105,78	29,17	1,90427	id.	15,55	15,24
114	69,00	25,25	1,65308	9288	4,59	4,56
115	155,25	35,25	2,09868	9288	5,70	5,86

Expériences sur le canal du Jard.

	Sections du canal.	Parois du canal.	Valeurs de $\sqrt{r}$.	Valeurs de b.	Vitesses à la surface.	Vitesses moyennes calculées.
	po.	po.				
116	16252	402	6,3583	8919	17,42	18,77
117	11905	366	5,7032	11520	12,17	14,52
118	10475	360	5,3942	15360	15,74	11,61
119	7858	340	4,8074	21827	9,61	8,38
120	7376	337	4,6784	27648	7,79	7,07
121	6125	324	4,3475	27648	7,27	6,55
			Expériences sur la rivière de Hayne.			
122	31498	569	7,43974	6048	35,11	27,62
123	38838	601	8,03879	6413	31,77	28,76
124	30905	568	7,37632	32951	13,61	10,08
125	39639	604	8,10108	35723	15,96	10,53

56. Voilà une comparaison bien satisfaisante, & qui donne un grand poids aux principes que nous avons établis. Notre théorie ne sera, si l'on veut, qu'une probabilité raisonnée; mais du moins la nature paroît agir d'une manière qui lui est bien

Digitized by Google

analogue. La plupart de ces expériences, au reſte, ne ſont point diſpendieuſes, & peuvent être facilement répétées. Nous croyons pouvoir aſſurer d'avance qu'on trouvera les réſultats conformes aux nôtres; & pour aider ceux qui voudroient perfectionner notre travail, nous ajouterons dans la ſuite quelques réflexions ſur les expériences, qui ſont propres d'ailleurs à éclaircir la théorie du mouvement uniforme de l'eau.

Digitized by Google

SECTION II.

Théorie du lit des Fleuves. Leur établissement.

57. JUSQU'ICI nous avons considéré le mouvement de l'eau sous le rapport unique de la vitesse moyenne que prend un courant, en vertu de l'égalité qui existe nécessairement entre la force de la pesanteur, qui l'oblige à s'écouler, & la somme des résistances qui doivent être vaincues par cette force. On a vu par le tableau qui précède, que cette loi d'égalité est observée, & fidèlement suivie dans toutes sortes de lits, depuis le lit circulaire des tuyaux de conduite jusqu'aux lits rectangulaires, trapèzes & irréguliers, soit qu'ils aient beaucoup de largeur avec peu de profondeur, soit que la profondeur égale & surpasse la largeur. Nous allons examiner dans cette deuxième section la variété que l'art ou la nature mettent dans la figure du lit des fleuves, les vitesses des divers filets d'eau qui en composent la masse, l'action du courant contre son lit, la résistance du lit contre le courant, l'équilibre entre ces deux puissances; d'où naît la stabilité du lit, l'établissement originaire du lit des fleuves, le tracé de ce lit, & la loi des sinuosités qui s'y forment naturellement. Tous ces objets nous conduiront à une connoissance assez exacte de la nature des fleuves,

Digitized by Google

& doivent précéder les règles que nous donnerons ensuite pour appliquer la théorie à la pratique. Nous ferons toujours marcher de front le raisonnement avec l'expérience, afin d'éviter les erreurs & les méprises où il n'est que trop aisé de tomber, dans l'étude des sciences physico-mathématiques.

CHAPITRE I.

De la figure des lits des fleuves, ou d'un courant quelconque.

58. PUISQUE la résistance naît du lit, & qu'à sections égales, elle est d'autant plus grande que le périmètre du lit est plus grand, il est clair que la figure circulaire est celle où la résistance est la moindre, puisque le cercle renferme un espace sous le moindre périmètre possible. On emploie cette forme dans les conduites d'eau qui se font en bois, en terre cuite, en fer, en plomb, &c. & c'est avec raison; puisque l'avantage d'épargner la matière se trouve réuni à celui de procurer la plus grande dépense d'eau, toutes choses égales d'ailleurs. Dans un lit circulaire, le rayon moyen est toujours égal au quart du diamètre, parce que l'aire d'un cercle étant le produit de la circonférence par la moitié du rayon, ce produit, divisé par la paroi, qui est la circonférence même, redevient la moitié du rayon, ou le quart du diamètre.

Si

Digitized by Google

Si la figure de la ſection eſt un demi-cercle, r aura encore la même valeur.

En général, parmi tous les polygones réguliers de même ſurface, celui qui aura le plus grand nombre de côtés aura auſſi le plus grand rayon moyen; & il en ſera de même de leurs moitiés, qui ont le même rayon moyen que chaque polygone entier. Ainſi, l'exagone donne, à ſurface égale, une plus grande valeur de r que le pentagone, & celui-ci en donne une plus grande que le quarré. La moitié de l'exagone, qui eſt un trapèze régulier, a le même rayon moyen que l'exagone, & l'emporte par conſéqueut ſur le demi-pentagone, & encore plus ſur la moitié du quarré.

C'eſt encore un principe général, que quand la figure de la ſection eſt conſtante, le rayon moyen a un rapport conſtant avec l'une ou l'autre de ſes dimenſions.

59. La figure rectangulaire ne convient qu'aux canaux ou aqueducs revêtus en maçonnerie : ainſi, les lits ordinaires des rivières, creuſés dans la terre par la nature ou par l'art, ne pouvant avoir leurs bords verticaux, ont communément la forme d'un trapèze. Voici une valeur générale du rayon moyen qui convient à cette figure.

Soit le trapèze régulier ABCD, qui repréſente la ſection d'un lit de rivière. Nommons h la hauteur FB; l la largeur du fond BC; & a l'angle ABG ou BAD. On aura $AF = \frac{h \cos. a}{\sin. a}$, & AB = Fig. 5.

$\frac{h}{\text{fin. } a}$, en prenant l'unité pour le ſinus total. La ſection ſera donc $lh + \frac{h^2 \cos. a}{\text{fin. } a}$; la paroi ſera $l + \frac{2h}{\text{fin. } a}$, & $r = \frac{h\left(l + \frac{h \cos. a}{\text{fin. } a}\right)}{l + \frac{2h}{\text{fin. } a}} = \frac{l \text{ fin. } a + h \cos. a}{\frac{l}{h} + 2}$, formule qui devient celle du lit rectangulaire, en faiſant fin. $a = 1$.

60. Entre tous les trapèzes il eſt clair, ainſi que nous l'avons déja dit (58), que celui qui fait la moitié d'un hexagone, eſt celui qui donne la plus grande valeur de r, à ſurface égale; mais il offre des taluds trop roides, pour que les terres ordinaires puiſſent ſe ſoutenir ſans s'ébouler. On remarque que la proportion la plus commune des taluds de terre doit être de quatre parties de baſe pour trois de hauteur verticale : ceux qui n'ont que pied pour pied, ou l'inclinaiſon de 45 degrés, n'ont point encore aſſez de ſolidité.

Fig. 6. Si donc on ſuppoſe que AH & HB, CG & GE ſoient également dans le rapport de 3 à 4, les hypothénuſes AB & CE ſeront repréſentées par le nombre 5; & ſi on partage en deux également les lignes AB ou HB, CE ou GE, & qu'on tire les verticales DF & IK, le lit rectangulaire FDIK aura même ſurface que le trapèze ABEC; mais les périmètres de ces deux lits ſeront auſſi égaux, parcequ'on a AB = FD + DB, & CE = KI + IE. La valeur du rayon moyen ſera donc la même dans ces deux figures de lit. D'un autre côté, on

Digitized by Google

ſait qu'entre tous les lits rectangulaires, celui dont la largeur eſt double de la hauteur, ou qui fait la moitié d'un quarré, eſt celui qui donne le plus grand rayon moyen; d'où il ſuit que le trapèze ABEC, qui a même ſurface & même périmètre que le demi quarré, eſt auſſi, entre tous les trapèzes de ſon eſpèce, celui qui donne, à même ſurface, le plus grand rayon moyen. Or, la viteſſe étant, toutes choſes égales d'ailleurs, ſenſiblement proportionnelle à la racine quarrée du rayon moyen du lit, il faut conclure que le lit de figure trapèze, dans lequel la largeur au fond eſt les $\frac{2}{3}$ de la hauteur de l'eau, & où les taluds ſont les $\frac{4}{3}$ de cette profondeur, eſt de tous les lits trapèzes d'égale ſection, & poſſibles dans la pratique, celui qui ſe prête à la plus grande viteſſe, quand la pente eſt conſtante, ou qui exige le moins de pente, ſi la viteſſe eſt donnée : auſſi voit-on dans la pratique que les torrens qui creuſent un terrain ſuſceptible d'être attaqué par leur impétuoſité, prennent un lit à-peu-près ſemblable à celui-ci; pourvu néanmoins que ce terrain ſoit homogène, & que le fond du lit ne ſe rempliſſe pas de pierres & de galets délavés, dont la réſiſtance oblige la ſection à s'élargir, faute de pouvoir s'approfondir. Cette réflexion nous laiſſe déja entrevoir que la figure du lit des rivières n'eſt point fortuite, mais qu'elle a des rapports néceſſaires avec la ténacité de la terre dont le lit eſt formé, & la viteſſe de l'eau qui y coule; c'eſt

Digitized by Google

ce qui deviendra beaucoup plus ſenſible par la ſuite, quand nous parlerons du régime du lit.

61. Un lit rectangulaire, dont la largeur eſt les $\frac{4}{3}$ de la profondeur, a donc même rayon moyen qu'un lit triangulaire, dont la largeur eſt les $\frac{8}{3}$ de ſa profondeur verticale; & on peut toujours rapporter l'un à l'autre, & prendre l'un pour l'autre les rayons moyens d'un lit rectangulaire ou d'un lit trapèze, dans lequel le talud ſera dans la proportion de quatre parties de baſe pour trois parties de hauteur : & comme dans les lits de figures ſemblables, le rayon moyen a un rapport conſtant avec l'une ou l'autre de leurs dimenſions, on peut former la table ſuivante, dans laquelle le rayon moyen eſt exprimé en fonctions de la largeur ou de la profondeur, & convient aux lits rectangulaires comme aux lits trapèzes qui leur répondent; l exprime la largeur réelle du lit rectangulaire, ou moyenne du lit trapèze; & h la profondeur.

	$1 : 1$		$r = \frac{1}{2} l$		$\frac{1}{2} h$
	$2 : 1$		$r = \frac{1}{4} l$		$\frac{1}{2} h$
	$3 : 1$		$r = \frac{1}{5} l$		$\frac{2}{5} h$
Si $l : h ::$	$4 : 1$	on aura	$r = \frac{1}{6} l$	ou	$\frac{2}{3} h$
	$5 : 1$		$r = \frac{1}{7} l$		$\frac{5}{7} h$
	$6 : 1$		$r = \frac{1}{8} l$		$\frac{3}{4} h$
	$7 : 1$		$r = \frac{1}{9} l$		$\frac{4}{9} h$

En général, ſi on nomme q le rapport de la largeur à la profondeur du lit, on aura, dans tous les cas, $r = \frac{l}{q+2}$ & $r = \frac{qh}{q+2}$.

Donc, ſi la profondeur étoit infinie, & la

Digitized by Google

largeur finie, on auroit $r = \frac{l}{2}$; & si au contraire la largeur étoit infinie, & la profondeur finie, on auroit $r = h$: ainsi, dans les rivières dont la largeur est très-grande en comparaison de la profondeur, on peut, sans erreur sensible, prendre leur profondeur pour le rayon moyen; & dans ce cas, leurs vitesses moyennes à même pente sont comme les racines quarrées de leurs profondeurs.

62. Il suit de ce qui précède, que dans les lits rectangulaires ou trapèzes correspondans, 1°. si le rayon moyen étoit connu, ainsi que le rapport de la largeur à la profondeur, on trouveroit les dimensions du lit, & on auroit $l = qr + 2r$, & $h = r + \frac{2r}{q}$. 2°. Si l'aire de la section étoit connue ainsi que le rayon moyen, on pourroit déterminer l & h, c'est-à-dire les dimensions du lit : car nommant S l'aire de la section, x la largeur du lit, & y sa profondeur, on aura les deux équations $S = xy$, & $r = \frac{xy}{x+2y}$; d'où l'on tire $x = \pm\sqrt{\frac{S^2}{4r^2} - 2S} + \frac{S}{2r}$: la largeur étant connue, on en déduira la profondeur. Mais il faut remarquer que le problême a deux solutions; car si on nomme L & H deux autres dimensions, on peut faire $L = 2y$, & $H = \frac{x}{2}$, qui donneront encore $\frac{LH}{L+2H} = r$, puisqu'il est évident que $\frac{2y \times \frac{x}{2}}{2y+x} = \frac{xy}{x+2y}$.

3°. Si le rayon moyen étoit donné avec une

Digitized by Google

des dimensions du lit, on trouveroit l'autre dimension, car l'équation $r = \frac{lh}{l+2h}$ donne $l = \frac{2hr}{h-r}$, & $h = \frac{lr}{l-2r}$. 4°. Si la vitesse & la pente étoient données, le rayon moyen se trouveroit aussi déterminé ; car la formule du mouvement uniforme peut s'exprimer par $V = \left(\frac{297}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}} - 0,3\right)(\sqrt{r} - 0,1)$, d'où l'on tire $\sqrt{r} - 0,1 = \frac{V}{\frac{297}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}} - 0,3}$ & $\sqrt{r} = \frac{V}{\frac{297}{\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}} - 0,3} + 0,1$; ainsi, le second membre élevé au quarré donne la valeur de *r*.

5°. Enfin, si la pente étoit inconnue, & qu'on la voulût déduire des trois autres élémens connus, c'est-à-dire de la vitesse, la largeur & la profondeur, le calcul rigoureux exigeroit des séries, parce que cette quantité se trouve sous le logarithme ; mais on peut se contenter d'abord de chercher la valeur de $\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6} = \frac{297(\sqrt{r} - 0,1)}{V + 0,3(\sqrt{r} - 0,1)}$, & ensuite par le tâtonnement le plus simple, on aura aisément celle de *b*.

63. Si l'eau, par sa pureté, étoit incapable de déposer du limon ou du sable fin dans les parties de son lit les moins exposées à l'énergie du courant, & que le lit, par sa solidité, ne permît pas au courant de l'attaquer & le ronger, il feroit in-

Digitized by Google

différent quelle forme on donnât au lit, & quelle viteſſe on permît au courant d'acquérir; on pourroit, dans tous les cas, ſe promettre de la ſtabilité; & l'eau, fidèle aux lois qu'on lui auroit preſcrites, renfermée dans les bornes qu'on lui auroit marquées, ne pourroit ni diminuer ni agrandir l'aire de ſa ſection : c'eſt tout au plus ce que l'art peut ſe promettre dans les conduires artificielles qu'on pratique pour mener des eaux claires & vives, en les renfermant dans des tuyaux ſolides; mais les fleuves, les rivières, les canaux & les ruiſſeaux ſont ſujets à rouler des eaux troubles & chargées de parties hétérogènes, qui ont de la diſpoſition a ſe précipiter par leur peſanteur ſpécifique; & le ſol dans lequel ils coulent n'a pas aſſez de conſiſtance ordinairement, pour réſiſter au frottement continuel du fluide en mouvement. Il eſt vrai que la nature, qui tend en toutes choſes à l'équilibre, travaille ſans relâche à perpétuer ſes ouvrages, en établiſſant l'égalité entre l'action & la réaction, & en proportionnant les formes & la direction des mouvemens à l'eſpèce des agens, & aux circonſtances locales qui modifient les efforts. Son action le plus ſouvent eſt lente, quoique continuelle; & ce qu'elle n'a pas fait en un ſiècle, elle l'achève en pluſieurs. Si les lits de nos fleuves ont actuellement quelque ſtabilité, ſi l'impétuoſité de leur cours ne confond plus nos poſſeſſions, nous en ſommes redevables au tems qui a creuſé de profondes vallées pour les contenir, qui a

Digitized by Google

consolidé & presque pétrifié leurs lits, ou qui leur a permis d'adoucir leur pente, autrefois beaucoup plus rapide. Si l'art peut parvenir en cela à imiter la nature, ou à hâter l'effet de ses opérations, toujours lentes pour la courte durée de la vie de l'homme, ce n'est que par l'étude de ses lois, & par une juste application des principes aux travaux hydrauliques que nous entreprenons. Continuons donc d'étudier le lit des fleuves, pour apprendre à les appliquer à notre usage, ou à prévenir les accidens dont ils nous menacent.

CHAPITRE II.

Des différentes vitesses de l'eau dans un courant uniforme. Comparaison de celles de la surface & du fond.

64. QUAND un courant est bien réglé, l'eau y coule uniformément, sans former de rides à sa surface, ni de tourbillons dans son intérieur; & chaque filet a une vitesse propre, qui est constante, & avec laquelle il glisse entre les filets supérieurs & les inférieurs. La vitesse moyenne de ce courant est celle qui, multipliée par chaque point de la section, donne un produit égal à la somme des produits de chaque point par sa vitesse particulière; c'est celle que nous avons consi-

Digitized by Google

ſidérée juſqu'à préſent comme la plus importante à connoître, & la ſeule peut-être à laquelle le calcul puiſſe s'appliquer avec exactitude. Cette viteſſe exiſte en quelque lieu du lit; mais elle eſt confondue avec un nombre infini d'autres qui la ſurpaſſent, ou qui ſont moindres qu'elles. Le lieu où elle ſe trouve ſituée dans le lit n'eſt point connu, & ne peut être déterminé par l'expérience; il varie autant que la figure du lit. Peut-être parviendroit-on, par des obſervations réitérées, à fixer le point du rayon où elle eſt placée dans la ſection régulière & conſtante d'une conduite circulaire; mais il n'en réſulteroit vraiſemblablement aucun avantage réel pour la théorie; & cette connoiſſance, bornée à ce ſeul cas, ne nous apprendroit pas où ſe trouve la viteſſe moyenne dans tous les autres lits irréguliers.

65. Quand le mouvement de l'eau eſt parvenu à l'uniformité dans un tuyau incliné, le filet qui répond à l'axe eſt celui qui ſe meut le plus vîte, parce qu'il eſt le plus éloigné de la cauſe qui retarde le mouvement, qui eſt la paroi. Si on imagine pluſieurs cercles concentriques entre le centre & la paroi intérieure du tuyau, tous les filets placés dans la circonférence d'un de ces cercles auront la même viteſſe; mais les viteſſes, dans ces différens cercles, décroîtront à meſure que les rayons augmenteront; & cette diminution croîtra toujours juſqu'au cercle qui touche la paroi, dans lequel la viteſſe ſera la plus petite de toutes.

Digitized by Google

Si l'on ſupprime le demi-cylindre ſupérieur de ce tuyau incliné, où le mouvement eſt uniforme, il reſtera un lit ouvert, dont la ſection ſera un demi-cercle, & les choſes reſteront dans le même état qu'auparavant ; la viteſſe moyenne ne changera pas, puiſque la pente & le rayon moyen n'ont pas changé; mais la viteſſe de l'axe ſera repréſentée par celle du milieu de la ſurface du nouveau lit, & celle à la paroi le ſera par celle du fond, ou par toute autre priſe à un point quelconque du lit.

En conſidérant les viteſſes ſous ce rapport, il paroît qu'après la connoiſſance de la viteſſe moyenne, il n'en eſt point de plus intéreſſante que celle du milieu de la ſurface du courant, & celle qui lui répond à la paroi ou au fond, dans la même verticale. La meſure des autres viteſſes priſes dans l'intérieur de la veine fluide, ne ſerviroit à rien, & celle des viteſſes à la paroi dans tout autre point qu'au milieu du fond, ſeroit ſi difficile à prendre avec préciſion, qu'on ne pourroit guères compter ſur ſon exactitude. Nous nous ſommes donc uniquement attachés à obſerver quelles étoient les viteſſes de l'eau à la ſurface & au fond, en même tems que la viteſſe moyenne nous étoit connue par la dépenſe diviſée par la ſection, & nous avons répété ces obſervations dans des lits rectangulaires & trapèzes très-variés. On verra dans le détail des expériences quels ont été les réſultats. Il ſuffit de dire ici que l'expérience a encore confirmé l'hypothèſe que nous avons

Digitized by Google

adoptée touchant le frottement (37). Quand les viteſſes moyennes ſont peu conſidérables, les viteſſes à la ſurface, qui ſont moins retardées par l'effet du frottement, ſont en grand rapport avec celles du fond; à meſure que les viteſſes moyennes croiſſent, ce rapport diminue, & il ne parviendroit ſans doute à l'égalité que dans des viteſſes infinies. Une choſe étonnante eſt que la grandeur du lit, ni celle de la pente, n'influe en rien ſur le rapport des différentes viteſſes dont nous parlons: tant que les viteſſes moyennes reſtent les mêmes, ou que celle à la ſurface eſt conſtante, on trouve conſtante celle du fond, ſans que la profondeur de l'eau ou la grandeur de la ſection y apportent de changement. L'expérience ſeule pouvoit démontrer l'exiſtence de cette loi, que la théorie n'auroit oſé imaginer, non plus que l'égalité de rapport arithmétique, que nous avons obſervé entre la viteſſe à la ſurface & la viteſſe moyenne, & entre celle-ci & la viteſſe du fond.

66. Il réſulte de nos expériences, 1°. que la viteſſe à la ſurface étant connue, ſi on extrait la racine quarrée de cette viteſſe par ſeconde, exprimée en pouces, & qu'on en retranche l'unité, cette quantité, élevée au quarré, ſera la valeur de la viteſſe de l'eau au fond du lit. 2°. Que la viteſſe moyenne eſt moyenne arithmétique entre la viteſſe à la ſurface & celle du fond.

Nommons v la viteſſe à la ſurface, U la viteſſe au fond, & V la viteſſe moyenne, on aura les

Digitized by Google

deux équations $U = (\sqrt{v} - 1)^2$, & $V = \frac{v+U}{2}$.

En combinant ces deux équations, on a les ſix équations ſuivantes, qui ſervent à déterminer chaque viteſſe en valeur d'une des deux autres.

$$v = (\sqrt{V - 0,25} + 0,5)^2 \quad \& \quad v = (\sqrt{U} + 1)^2$$
$$V = (\sqrt{v} - 0,5)^2 + 0,25 \quad \& \quad V = (\sqrt{U} + 0,5)^2 + 0,25$$
$$U = (\sqrt{v} - 1)^2 \quad \& \quad U = (\sqrt{V - 0,25} - 0,5)^2$$

67. On trouve auſſi $v - U = 2\sqrt{V - 0,25}$, & $v - V = V - U = \sqrt{V - 0,25}$, c'eſt-à-dire que les différences entre les viteſſes à la ſurface & celles au fond, croiſſent comme les racines quarrées des viteſſes moyennes, diminuées d'une petite quantité conſtante, ainſi que nous l'avons déja vu ci-deſſus. (50)

Voici, d'après ces différentes formules, une table des viteſſes au fond du lit, & des viteſſes moyennes, calculées d'après celles à la ſurface. La première colonne comprend les viteſſes uniformes à la ſurface, & au milieu de la largeur d'un courant, depuis un pouce juſqu'à 100 pouces par ſeconde. La ſeconde exprime la valeur de la racine quarrée de ces viteſſes, qu'il faut diminuer de l'unité, pour qu'en l'élevant au quarré, elle donne la valeur de la viteſſe au fond, qui eſt contenue dans la troiſième colonne. Enfin la qua-

Digitized by Google

tième montre quelles ſont les viteſſes moyennes uniformes qui répondent, dans un même lit, aux précédentes.

Table des viteſſes au fond d'un lit quelconque, & des viteſſes moyennes de ce lit, correſpondantes à celles de la ſurface, croiſſantes depuis 1 juſqu'à 100 pouces par ſeconde.

VALEURS de v, ou de la viteſſe uniforme à la ſurface.	VALEURS de $\sqrt{v}$.	VALEURS de U, ou de la viteſſe au fond du lit.	VALEURS de V, ou de la viteſſe moyenne uniforme du courant.
po.		po.	po.
1	1,0000	0,0000	0,500
2	1,4142	0,17156	1,0808
3	1,732	0,5365	1,768
4	2,000	1,0000	2,500
5	2,236	1,5257	3,263
6	2,449	2,1000	4,050
7	2,646	2,7093	4,854
8	2,828	3,3416	5,670
9	3,000	4,000	6,500
10	3,162	4,6742	7,337
11	3,317	5,3685	8,184
12	3,464	6,0713	9,036
13	3,605	6,7860	9,893
14	3,741	7,5131	10,756
15	3,873	8,2541	11,622
16	4,000	9,0000	12,500
17	4,123	9,7531	13,376
18	4,242	10,4628	14,231
19	4,359	11,2828	15,141
20	4,472	12,0548	16,027
21	4,582	12,6736	16,837
22	4,690	13,6161	17,808

Digitized by Google

VALEURS de v, ou de la vitesse uniforme à la surface.	VALEURS de $\sqrt{v}$.	VALEURS de U, ou de la vitesse au fond du lit.	VALEURS de V, ou de la vitesse moyenne uniforme du courant.
23	4,795	14,4020	18,70
24	4,898	15,1944	19,507
25	5,000	16,0000	20,500
26	5,099	16,8018	21,401
27	5,196	17,6064	22,303
28	5,292	18,4212	23,210
29	5,385	19,2282	24,114
30	5,477	20,0435	25,022
31	5,567	20,8574	25,924
32	5,656	21,6783	26,839
33	5,744	22,5055	27,753
34	5,831	23,3385	28,669
35	5,916	24,1670	29,583
36	6,000	25,0000	30,500
37	6,082	25,8267	31,413
38	6,164	26,6669	32,333
39	6,245	27,5100	33,255
40	6,324	28,3450	34,172
41	6,403	29,1924	35,096
42	6,480	30,0304	36,015
43	6,557	30,8802	36,940
44	6,634	31,7420	37,871
45	6,708	32,5812	38,790
46	6,782	33,4315	39,716
47	6,856	34,2927	40,646
48	6,928	35,1112	41,570
49	7,000	36,0000	42,500
50	7,071	36,8570	43,428
51	7,141	37,7119	44,356
52	7,210	38,5641	45,282
53	7,280	39,4384	46,219
54	7,347	40,2844	47,142
55	7,416	41,1650	48,082
56	7,482	42,0163	49,008
57	7,555	42,9680	49,984
58	7,616	43,7714	50,886

Digitized by Google

VALEURS de v, ou de la vitesse uniforme à la surface.	VALEURS de $\sqrt{v}$.	VALEURS de U, ou de la vitesse au fond du lit.	VALEURS de V, ou de la vitesse moyenne uniforme du courant.
59	7,681	44,6357	51,818
60	7,746	45,5085	52,754
61	7,810	46,3761	53,688
62	7,874	47,2588	54,629
63	7,938	48,1358	55,568
64	8,000	49,0000	56,500
65	8,062	49,8718	57,436
66	8,124	50,7513	58,376
67	8,186	51,6386	59,319
68	8,246	52,5045	60,252
69	8,307	53,3922	61,196
70	8,367	54,2727	62,136
71	8,426	55,1454	63,072
72	8,485	56,0252	64,012
73	8,544	56,8619	64,932
74	8,602	57,7904	65,895
75	8,660	58,6866	66,843
76	8,718	59,5675	67,784
77	8,775	60,4506	68,725
78	8,832	61,3402	69,670
79	8,888	62,2094	70,605
80	8,944	63,1071	71,553
81	9,000	64,0000	72,500
82	9,055	64,8830	73,441
83	9,111	65,7800	74,390
84	9,164	66,6509	75,325
85	9,220	67,5084	76,284
86	9,274	68,4590	77,229
87	9,327	69,3389	78,169
88	9,380	70,2244	79,112
89	9,434	71,1323	80,066
90	9,486	72,0122	81,006
91	9,539	42,9145	81,957
92	9,590	73,7881	82,894
93	9,644	74,7187	83,859
94	9,695	75,6030	84,801

Digitized by Google

VALEURS de v, ou de la vitesse uniforme à la surface.	VALEURS de $\sqrt{v}$.	VALEURS de U, ou de la vitesse au fond du lit.	VALEURS de V, ou de la vitesse moyenne uniforme du courant.
95	9,747	76,5100	85,755
96	9,796	77,3696	86,685
97	9,849	78,3048	87,652
98	9,899	79,1922	88,596
99	9,951	80,1204	89,560
100	10,000	81,0000	90,500

68. On n'a poussé cette table que jusqu'à une vitesse de 100 pouces par seconde, parce qu'il est rare de trouver des vitesses plus grandes dans la pratique. Si on les compare aux résultats des expériences que nous avons faites sur des vitesses à la surface, depuis 6 pouces jusqu'à 48, & dont nous rendrons compte plus bas (389), on verrra que les vitesses moyennes & celles du fond, calculées d'après nos formules, & comprises dans la table, suivent la même marche que celles de la nature, & n'en diffèrent que par une suite des légères erreurs qui se glissent dans des expériences aussi délicates.

La régularité du rapport entre les trois vitesses que nous considérons, quelque grandeur qu'ait le lit, quelque variée que soit la figure, quelque inégales que soient les pentes, est si surprenante, qu'on peut croire qu'elle n'auroit lieu, à la rigueur, que dans des lits absolument réguliers comme le cercle; & néanmoins l'expérience montre

Digitized by Google

montre qu'elle a lieu du moins ſenſiblement, dans ceux où la largeur étoit 6 & 7 fois auſſi grande que la profondeur.

Quoique nous n'ayons pas déterminé, d'après l'obſervation, en quel lieu de la profondeur verticale d'un courant ſe trouve la viteſſe uniforme moyenne, on peut cependant conclure des expériences 119 & 120, que quand la viteſſe moyenne eſt bornée, elle ſe trouve aſſez près du fond, vers le $\frac{1}{5}$ ou le $\frac{1}{4}$ de cette profondeur; mais il eſt probable que dans les grandes viteſſes elle eſt ſituée plus haut, quoiqu'elle ne puiſſe jamais être au milieu, à moins que la viteſſe moyenne étant infinie, celles de la ſurface & du fond ne lui ſoient ſenſiblement égales.

69. La connoiſſance du rapport des trois viteſſes principales d'un courant quelconque peut être d'une grande utilité dans la pratique, car il eſt preſque toujours aiſé de meſurer avec une certaine préciſion celle du milieu de la ſurface, & cette meſure mène a la connoiſſance des deux autres, & par conſéquent de la dépenſe, en y ajoutant la meſure de la ſection. Si on meſuroit auſſi le développement de la paroi du lit, on pourroit encore, par le moyen de la formule, (51) calculer la pente du lit, ou, ſi la pente étoit connue, ainſi que la viteſſe à la ſurface, & la largeur moyenne du courant, on en concluroit la profondeur. Ces conſéquences ſont ſi viſibles, qu'il n'eſt pas néceſſaire de s'y arrêter.

Quant à la viteſſe au fond du lit, elle paroît d'abord moins importante à connoître, mais elle a une influence ſi intéreſſante ſur l'action que le courant exerce contre ſon lit, pour le creuſer & l'élargir, ou pour laiſſer former au contraire des dépôts & des attériſſemens, qu'on n'auroit ſans elle qu'une idée fort imparfaite de la manière dont les fleuves & les rivières travaillent leur lit, & en proportionnent les dimenſions à la quantité d'eau qu'ils ont à écouler, & à la pente qu'ils peuvent prendre pour ſe rendre dans la mer; c'eſt ce qui va nous occuper dans les chapitres ſuivans.

CHAPITRE III.

De l'action réciproque que le lit & le courant exercent l'un ſur l'autre. Expreſſion générale de la réſiſtance.

70. SI le lit d'un fleuve modère & fixe la viteſſe de ſes eaux, en leur communiquant ſon inertie, le courant, à ſon tour, exerce ſur le lit une action à laquelle il ne peut pas long-tems réſiſter, ſi la viteſſe du fond eſt trop grande, & que le ſol qui compoſe le lit ſoit de nature à céder à ſon action : dans le cas contraire, c'eſt-à dire ſi la viteſſe eſt trop petite, & que l'eau du fleuve ſe trouve, habituellement ou par intervalles, chargée de limon & d'autres matières hétérogènes, ſpé-

Digitized by Google

cifiquement plus pefantes que l'eau, ces matières forment dans le lit un dépôt qui le relève, & qui tend à en diminuer la fection. Il y a une variété infinie dans la nature des terrains qui forment le lit des rivières : tantôt c'eft de l'argile, dont la qualité varie beaucoup, felon les pays ; tantôt c'eft de la glaife ; ici c'eft un gros fable anguleux & rude ; là c'eft un fable arrondi ou plus fin : beaucoup de rivières coulent fur du gravier, dont les petites maffes varient par la groffeur, la pefanteur & la figure ; d'autres roulent des galets & des pierres à fufil ; il y en a enfin dont le lit paroît avoir été originairement creufé dans un fol argileux ou calcaire, qui s'eft pétrifié à la longue, & qui a aujourd'hui toute la dureté du rocher.

A chaque nature de terrain répond une inertie plus ou moins grande, qui peut réfifter à une viteffe de courant donnée, qui céderoit à une plus grande, & qui l'emporteroit fur une plus petite. Si la viteffe eft trop grande, le lit fe creufera & s'élargira ; fi elle eft exacte, il aura de la ftabilité ; fi enfin elle eft trop petite, l'eau trouble y dépofera fon limon.

71. Nous avons fait plufieurs expériences, pour déterminer à quelles viteffes font capables de réfifter ou de céder différentes natures de terrein, dont nous avons fixé la pefanteur fpécifique. On trouvera ces expériences ci-deffous (399). Il en réfulte, 1°. que l'argile brune, propre à la poterie,

Digitized by Google

quoique ſpécifiquement plus peſante que toutes les autres matières, ne commence à réſiſter à l'action du courant que quand la viteſſe du fond eſt d'environ 3 pouces par ſeconde, ou celle de la ſurface de 8 pouces. La facilité avec laquelle l'eau l'attaque, vient ſans doute de la grande ténuité de ſes parties, qui offrent plus de ſurface à proportion que de maſſe. 2°. Le ſable fin commence à réſiſter à une viteſſe de 6 pouces au fond, ou de 12 pouces à la ſurface. 3°. Le gros ſable anguleux a de la ſtabilité, quand la viteſſe au fond eſt moindre que 8 pouces. 4°. Le gravier de la Seine, ſéparé en trois claſſes, de fin, moyen & gros, a de la ſtabilité aux viteſſes correſpondantes de 4 pouces, 7 pouces, & 12 pouces. 5°. Les galets arrondis, d'un pouce de diamètre, réſiſtent à une viteſſe de 24 pouces; & enfin 6°. le ſilex anguleux, du volume d'un œuf, réſiſte à une viteſſe de 36 pouces.

72. La manière dont l'eau courante travaille le fond de ſon lit, quand il eſt de nature à lui céder, & dont ſe fait le tranſport du ſable qu'elle charie avec elle, eſt tout-à-fait admirable, & mérite d'être rapportée. Tantôt c'eſt un tourbillon qui emporte la terre & le ſable fin, comme le vent emporte la fumée; & cet effet a lieu quand la viteſſe eſt aſſez grande pour que le choc du fluide ſoit pleinement victorieux de l'inertie des molécules ſolides; tantôt c'eſt un travail réglé, plus paiſible, & pour ainſi dire méthodique, qu'on

Digitized by Google

peut admirer comme un chef-d'œuvre de dynamique. Je vais essayer d'en donner une idée.

Lorsque la vitesse au fond du lit est assez grande pour faire glisser ou rouler des corps spécifiquement plus pesans que l'eau, ces corps ne sont point entraînés d'une maniere uniforme, mais ils cheminent, pour ainsi dire, par relais. Prenons le sable pour exemple. Quand le fond du lit est de sable un peu gros & bien visible, & que la vitesse s'y trouve de 10 à 12 pouces par seconde, il offre aux yeux le dessein de ces tapisseries, connues sous le nom de point de Hongrie, en présentant des sillons irréguliers, dont la direction est perpendiculaire au cours de l'eau. Chacun de ces sillons est composé de deux glacis à pente opposée; celui qui regarde le côté d'où vient l'eau est une pente fort alongée, dont le sommet est commun à l'autre pente plus roide, qui regarde le côté d'aval. Le profil d'un sillon est assez ressemblant à celui du glacis & du chemin couvert d'une place de guerre. A peu de distance du pied du talud le plus roide, commence la rampe douce d'un autre sillon, & ainsi de suite en descendant. Un grain de sable, poussé par le courant, monte la pente douce du premier talud, & étant arrivé au sommet, il roule par son propre poids du haut en bas du talud opposé; là il demeure en repos, à l'abri de l'action du fluide, & il est recouvert par d'autres grains, qui viennent à leur tour. Ce travail ressemble assez à celui

Digitized by Google

des terraſſiers qui roulent la brouette, en montant avec leur charge la rampe du remblai, pour la verſer au ſommet, & en faire rouler les terres du haut en bas : ces grains de ſable, ainſi enterrés, reſtent en repos, chargés & recouverts par les derniers venus, juſquà ce que toute la maſſe du ſillon, qu'ils avoient laiſſé en arrière, ait paſſé en détail au deſſus d'eux. C'eſt ainſi que le ſillon tout entier ſe déplace en détail, en avançant peu-à-peu d'un eſpace égal à ſa largeur : alors, le grain dont je parle ſe trouve au pied du nouveau glacis qui s'eſt formé en avant de lui; & comme il s'y trouve de nouveau expoſé à l'action de l'eau, il monte ce glacis, & ſe précipite de nouveau, comme la première fois en bas du remblai. Tandis qu'un ſillon chemine ainſi fort lentement, tous les autres en font autant, & ſi la viteſſe de l'eau eſt modérée, il ne faut pas moins d'une demi-heure, pour que chacun faſſe ce pas progreſſif, qui eſt de 4 à 5 pouces. Si la viteſſe de l'eau augmente, l'ouvrage ſe fait avec plus de diligence, & il ſe ralentit au contraire quand elle diminue. Ainſi, dans un travail moyen, il faut environ deux ans, pour qu'un grain de ſable parcourre une lieue de deux mille quatre cents toiſes.

73. Les molécules les plus déliées du ſable fin & de l'argile étant emportées avec moins de ménagement par le courant, le fond du lit ſe trouve garni du ſable le plus gros, des petits cailloux, des pierres & des maſſes les plus volumineuſes,

Digitized by Google

qui tombent & s'arrêtent dans le fond du lit, & y forment ſouvent une couche ſolide, dont la réſiſtance oblige le courant à élargir ſon lit, ou même à ſe déplacer tout-à-fait, s'il trouve moins de réſiſtance de droite & de gauche. C'eſt preſque toujours de ce principe, c'eſt-à-dire de l'amas des graviers ou de pierres dans le fond du lit, que naiſſent ſes déplacemens ; & cela eſt inévitable, lorſque le terrein n'eſt pas parfaitement homogène.

74. Il nous reſte à examiner comment on peut évaluer en poids la réſiſtance que l'eau éprouve de la part de ſon lit, ou l'effort que fait un courant contre ſon lit, dans le ſens du mouvement, pour l'entraîner avec lui, s'il ne réſiſtoit pas à cet effort par ſon inertie.

Il ſuit du principe fondamental, (20) que quand l'eau ſe meut uniformément dans un lit, la réſiſtance totale qu'elle y éprouve eſt égale à ſa force accélératrice : or, cette force accélératrice eſt égale au poids de toute la maſſe en mouvement, multiplié par la fraction qui exprime la pente du lit ; la maſſe eſt repréſentée par la ſection, multipliée par le dénominateur de la fraction qui exprime la pente. Or, le rayon moyen étant égal à la ſection diviſée par la paroi, il eſt clair que la ſection eſt égale au produit du rayon moyen par la paroi ; ainſi, nommant p la paroi, & r le rayon moyen, la ſection eſt exprimée par rp ; la maſſe en mouvement eſt exprimée par

Digitized by Google

rpb ; & la force accélératrice, ou la résistance, est exprimée par $\frac{rpb}{b} = rp$. Telle est l'expression de la résistance sur toute la longueur b. Mais si l'on ne considère cette résistance que sur une longueur égale à l'unité, pour avoir sa nouvelle valeur, il faudra diviser par b la quantité rp, ce qui donne l'expression de la résistance $\frac{rp}{b}$. Enfin, si on ne considère la résistance que sur une largeur de paroi égale à l'unité, il faudra diviser par p l'expression $\frac{rp}{b}$; ainsi, cette résistance, en prenant le pouce pour l'unité, sera exprimée pour un pouce quarré, par le poids d'un volume d'eau qui auroit pour base un pouce quarré, & une hauteur égale à $\frac{r}{b}$; & si on nomme S une surface quelconque de paroi, exprimée en pouces quarrés, & F le frottement improprement dit, on aura $F = \frac{Sr}{b}$.

Je dis que telle est la valeur du frottement improprement dit, parce que la résistance totale, représentée par ce poids, est composée du frottement, de l'attraction des parois, & de l'effet de la viscosité du fluide ; d'où il arrive que, dans les grandes vitesses, la resistance dans les grands lits est moindre que dans les petits, à même vitesse & même surface de paroi ; & qu'au contraire, dans les petites vitesses, la résistance dans les grands lits est plus grande que dans les petits, pour une surface de parois & une vitesse égales:

Digitized by Google

c'eſt ce qu'on peut remarquer, en comparant deux à deux les expériences 12 & 71, 50 & 113; 53 & 124 du tableau précédent (55).

CHAPITRE IV.

Etabliſſement du lit des rivières. Des accrues permanentes. Régime du lit. Des accrues accidentelles ou périodiques.

75. ON ſait qu'un fleuve eſt le canal que la ſeule nature a creuſé, pour écouler à la mer toute l'eau des ſources, & une partie de l'eau des pluies qui arroſent la ſurface du terrein, dont la pente naturelle conduit ces eaux, ou directement dans le fleuve dont nous parlons, ou dans les rivières, les ruiſſeaux & les torrens qui viennent s'y décharger, ſur toute la longueur de ſon cours, tellement que ce fleuve groſſit toujours à meſure qu'il s'éloigne de ſa ſource, & qu'il s'approche de la décharge commune de toutes les terres hautes.

Quand on conſidère la largeur & la profondeur des vallées, au fond deſquelles coulent aujourd'hui les rivières de tout le globe, on s'apperçoit aiſément qu'elles ont été creuſées petit à petit par les eaux courantes, & que ſi leur lit a maintenant quelque ſtabilité, il ne la doit qu'à un travail énorme, fait par les eaux qui ont coulé ſans

Digitized by Google

interruption, depuis un terme très-éloigné, que les hiſtoriens ſacrés nous apprennent être de quatre mille ans, c'eſt-à-dire depuis le bouleververſement général de la ſurface du globe par le déluge. Sans adopter aucun ſyſtême particulier, il eſt très-certain que la ſurface des terres hautes, ou élevées au deſſus du niveau de la mer, change continuellement, & que le ſol ſur lequel nous marchons aujourd'hui n'eſt pas celui que nos ancêtres fouloient aux pieds. Les pluies du ciel entraînent dans les vallons, ou précipitent dans les torrens une partie de la terre qui couvre les hauteurs & les côteaux; les torrens charient ce limon dans les rivières, les rivières dans les fleuves, & enfin les fleuves dans la mer, où cette graiſſe de la terre, abſorbée & engloutie dans les eaux, eſt perdue pour la végétation. Ainſi, les collines s'abaiſſent, les vallées ſe comblent, les montagnes découvrent le roc de leurs entrailles; & les terrains bas, relévés & nourris pour quelque tems de la ſubſtance des terres hautes, iront, à leur tour, mais plus tard, s'abîmer dans l'océan. La terre alors, réduite à un niveau effrayant, ne préſentera plus dans l'avenir qu'un marais immenſe & inhabitable, & ſi nous ſommes encore éloignés du terme où arrivera cette cataſtrophe, que le travail de tout le genre humain à la fois ne peut empêcher, nous n'en ſommes redevables qu'au peu d'antiquité du monde, qui ne vieillit que par des degrés lents, mais à la nature duquel

Digitized by Google

il répugne d'avoir toujours été, ou de devoir être toujours.

76. La ſurface de la terre n'avoit donc point, dans ces tems reculés, comme de nos jours, ces grands canaux, ces vaſtes décharges, toujours prêtes à écouler les eaux de pluie, que l'aridité de la terre n'abſorbe qu'en partie, & nourries en tout tems, quoique moins abondamment, des ſources d'eau pure qui coulent du pied des montagnes; les rivières & les fleuves n'exiſtoient pas encore, ou n'étoient tout au plus que des torrens, dont l'eau raſſemblée dans les vallons, cherchoit une iſſue pour s'échapper. De-là naiſſoit une multitude de lacs dans l'intérieur des continens, tels qu'on en voit encore pluſieurs dans l'Amérique ſeptentrionale : les plus éloignés de la mer ne pouvant plus contenir leurs eaux, reverſoient, par un trop plein, dans les baſſins inférieurs, ceux-ci, à leur tour, ſe verſoient dans d'autres, & ainſi de ſuite juſqu'aux derniers qui avoiſinoient la mer. La communication d'un baſſin à l'autre étoit ouverte par un courant plus ou moins rapide; & le ſol, déchiré par ce courant, préſentoit l'ébauche d'un lit qui s'approfondiſſoit de plus en plus : mais les eaux de pluſieurs baſſins, réunies & coulantes enſemble en grand volume, devoient avoir, à pentes égales, beaucoup plus de viteſſe & de violence que celles des baſſins reculés dans les terres; & la ſomme de tous les courans réunis dans le baſſin le plus voiſin de la mer, après

Digitized by Google

avoir ſurmonté & rompu ſa digue naturelle, devoit former un torrent prodigieux, qui creuſoit un lit d'autant plus profond, que l'eau avoit plus de maſſe & plus de pente.

La formation des vallées, creuſées par le cours de ces torrens, donna lieu à beaucoup de ſources, qui n'exiſtoient point auparavant, faute d'iſſue; & les lacs ne purent être deſſéchés que lorſque la digue qui les ſéparoit s'eſt trouvée ſuffiſamment approfondie, pour en laiſſer le fond à ſec.

De cette diſpoſition aſſez naturelle il réſulte que, dans l'ébauche du lit des fleuves, ces lits dûrent s'approfondir d'autant plus, qu'ils avoient, en approchant de la mer, de plus grands volumes d'eau de pluie ou de ſources à écouler, & qu'au contraire à leur origine, vers le milieu des continens, ils ſe creuſoient moins que par-tout ailleurs: ainſi, au point de départ des eaux, que la pente naturelle du terrein porte vers une rivière, le ſol ne peut baiſſer que par l'applaniſſement des montagnes & des pays élevés: or, la cauſe qui produit cet applaniſſement doit avoir des effets très-lents, parce qu'elle ne conſiſte que dans le travail périodique des eaux de pluie ou de ſource, qui creuſent mille petits ruiſſeaux ſur la pente des hauteurs; mais à meſure que les fleuves, groſſis par la réunion de pluſieurs rivières, avancent vers la mer, ils ont plus de force pour creuſer leur lit, & pour en égaler le fond au niveau de la mer même.

Digitized by Google

77. Le lit des fleuves, celui même des rivières, ne forme donc pas un plan incliné uniforme, en le considérant depuis la source jusqu'à l'embouchure; mais c'est l'assemblage de plusieurs plans inclinés contigus, dont les pentes vont toujours en décroissant vers la mer.

Soit, par exemple, le fleuve SABCDEF, dont la source est en S, & qui reçoit différens ruisseaux ou petites rivières *ga*, *hb*, *ic*, *kd*, *le*: si on imagine une coupe longitudinale du terrain, suivant le développement du lit de ce fleuve, la ligne SA représentera le lit du premier torrent vers sa source. Depuis le point A, où se fait le premier confluent du premier ruisseau *ga*, jusqu'au confluent B du deuxième ruisseau, le lit sera représenté par AB; de-là jusqu'au troisième ruisseau, le lit sera BC, & ainsi de suite CD, DE, EF, jusqu'à l'embouchure. Fig. 7.

Par succession de tems, chaque torrent *ga*, *hb*, &c. sera devenu un ruisseau, puis une petite rivière, formée par la somme de tous les torrens & de toutes les sources qui labourent continuellement les côteaux; & peu-à-peu chaque rivière, en se rendant dans le fleuve principal, aura donné à la pente de son lit une courbure proportionnellement semblable à celle SABCDEF du fleuve.

On sent bien que la nature du terrain où se creusent les lits des eaux courantes, étant très-variée, elle aura mis les mêmes variétés dans les pentes de ces lits; mais, hors les cas particuliers,

Digitized by Google

voilà la marche générale qu'auront ſuivie les fleuves & les rivières dans l'établiſſement de leurs lits.

78. Cela poſé, on peut demander quelles ſont les circonſtances néceſſaires, où il faut qu'un fleuve ſe trouve pour ceſſer de creuſer ſon lit, & pour avoir de la ſtabilité. Nous allons examiner cette queſtion, après avoir défini ce que nous devons entendre par le mot de *ſtabilité* ou de *régime*, & avoir diſtingué deux ſortes d'accrues auxquelles ſont ſujets les fleuves & les rivières.

Nous diſons qu'un fleuve, une rivière, ou en général un courant d'eau quelconque a de la ſtabilité, ou que ſa viteſſe eſt celle d'un régime exact, lorſque, dans le tems des plus grandes crues auxquelles il eſt ſujet, ſa rapidité eſt telle que la ténacité du terrain dont le lit eſt formé fait équilibre à ſon action, & s'oppoſe à ſa corroſion, non-ſeulement vers le fond du lit, mais encore au bord & au talud de ſes rives. Si le courant trop rapide détache & emporte avec lui quelques parcelles de ſable, de terre, de gravier, ou même de pierre, nous diſons que la viteſſe eſt plus grande que celle du régime, c'eſt-à-dire que le lit tend à s'approfondir ou à s'élargir : ſi au contraire la conſiſtance du terrain eſt plus que ſuffiſante pour réſiſter au frottement du courant, la viteſſe alors eſt plus petite qne celle du régime, & le lit tend à ſe combler ou à ſe rétrécir, pour peu que l'eau charie avec elle des matières propres à s'y dépoſer.

Digitized by Google

Ainſi, par le terme de *régime*, nous entendons proprement une viteſſe de courant relative à la réſiſtance du terrain qui forme le lit; d'où l'on doit conclure qu'il y a autant de régimes qu'il y a de natures de terrains propres à oppoſer plus ou moins de réſiſtance au courant de l'eau. Ainſi, le régime du Rhône, qui coule ſur un lit recouvert de pierres aſſez groſſes, doit être plus grand que celui de la Meuſe on de la Seine, qui coulent ſur du gravier; le régime de la Seine & de la Meuſe doit être plus grand que celui du Rhin, qui coule ſur le ſable; & le régime de ce dernier eſt ſans doute plus grand que celui de l'Eſcaut, de la Somme, de l'Aiſne, & de toutes les rivières qui coulent ſur de l'argile. Dans une même rivière, le régime ſouvent n'eſt pas uniforme; car là où elle coule ſur des bancs de rocher, ſa viteſſe peut être plus grande, ſans inconvénient, que dans les lieux où le terrein eſt moins réſiſtant.

Il faut à préſent expliquer ce que nous entendons par *accrues permanentes*, & *accrues accidentelles ou périodiques*. Une accrue permanente eſt celle qu'éprouve une rivière ou un fleuve dans ſon cours, lorſqu'un ruiſſeau ou une rivière nouvelle vient joindre ſes eaux aux ſiennes, en groſſiſſant ſon volume, & augmentant ſa dépenſe; ainſi, le produit ordinaire & moyen des ſources qui nourriſſent la rivière S*a*, ſe trouvant augmenté de celui de la rivière *ga*, qu'on peut lui ſuppoſer égale ou inégale, le lit *ab* éprouvera une accrue

Digitized by Google

permanente : de même le lit *bc* en éprouvera une ſeconde, le lit *cd* une troiſième, & ainſi de ſuite juſqu'au lit *ef*, qui dépenſera autant que les ſix riviéres S*a*, *ga*, *hb*, *ic*, *kd*, *le*.

Mais nous entendons par *accrue extraordinaire ou périodique* celle qui arrive lorſqu'une pluie, un orage, une fonte de neige, &c. groſſiſſant à la fois pluſieurs des rivières, ou même toutes celles qui affluent dans le fleuve, il eſt obligé de dépenſer toute l'eau qui ſurvient ainſi extraordinairement. Ces accrues univerſelles arrivent ordinairement dans notre climat vers le 15 Février; ailleurs c'eſt au mois de Mai & de Juin, lorſque la fonte des neiges arrive ſur les montagnes; mais en général il eſt peu de pays qui ne ſoit ſujet à des pluies périodiques, qui groſſiſſent les rivières, & font monter leurs eaux à une hauteur à-peu-près égale tous les ans.

79. Pour répondre à préſent à la queſtion que nous nous ſommes propoſée, je reprends & je diſtingue deux ſortes de régimes; 1°. l'un qui répond aux crues permanentes, 2°. l'autre qui répond aux crues accidentelles & périodiques. Si on ſuppoſe homogène toute l'étendue du terrain que parcourt un fleuve depuis ſa ſource juſqu'à la mer, la viteſſe de régime qui convient à ce terrain ſera partout la même, c'eſt-à-dire qu'afin que ſon lit ait de la ſtabilité, il faudra que la viteſſe moyenne du courant ſoit conſtante, malgré l'inégalité de la dépenſe occaſionnée par les accrues permanentes

des

Digitized by Google

des rivières qui y affluent de diſtance en diſtance, & l'augmentation de l'aire de ſa ſection, à meſure qu'il approche de la mer. D'un autre côté, le régime a dû commencer d'abord à s'établir vers l'embouchure, par l'effet du travail des eaux entières du fleuve, combiné avec le niveau de la mer, qui eſt ſenſiblement fixe & invariable : or, ce travail a dû commencer par creuſer le lit, en ne lui donnant que la moindre largeur poſſible ; car il conſiſte principalement dans l'effet des chûtes, des cataractes, ou au moins des caſcades qui ſe forment d'elles-mêmes dans tout lit qui a trop de pente ; le fond ſe creuſe & s'abaiſſe, tandis que les bords reſtent à pic, juſqu'à ce qu'il ſe faſſe des éboulemens qui précipitent les rives dans le courant : les terres éboulées, ameublies & détrempées, ſont bientôt emportées par l'eau ; le lit continue à s'approfondir ; les rives croulent de nouveau ; la vallée ſe forme ; mais la ſection du courant, toujours reſſerrée dans le fond, ne peut acquérir que peu de largeur ; elle reſte donc à-peu-près ſemblable à la figure du trapèze dont nous avons parlé (60), & c'eſt ſous cette forme que le régime commence à s'établir depuis *f* juſqu'en *e*.

Quant au lit ſupérieur *ed*, ſa dépenſe ſera diminuée de toute la quantité d'eau de la rivière *le* ; il devra auſſi prendre la même forme, mais ſon aire diminuera, afin que la viteſſe reſte conſtante ; & le rayon moyen étant plus petit dans cette partie que dans l'inférieure *ef*, il faudra que la

pente reste plus grande. En faisant le même raisonnement pour les lits supérieurs, on voit que la pente du lit *cd* sera plus grande que celle du lit *de*; que celle du lit *bc* sera encore plus grande que celle du lit *cd*; & ainsi de suite, à mesure que par la suite des tems le régime s'établira progressivement, en s'éloignant de la mer, & s'approchant de la source.

Mais s'il survient, comme il n'en faut pas douter, des accrues accidentelles, causées par les pluies du ciel, elles doivent apporter du changement à cette marche méthodique des crues permanentes; comme leur effet principal est d'augmenter la vitesse du courant, elles hâtent l'approfondissement du lit, & la diminution de la pente: mais quand le régime des crues permanentes est établi, ces crues accidentelles doivent élargir le lit, sans presque l'approfondir, du moins d'une manière durable, & cela par trois raisons. 1°. Parce que les roseaux & différentes sortes d'herbes aquatiques ayant poussé & jeté leurs racines dans le fond du lit, pendant l'intervalle des crues périodiques, ils en tapissent la paroi, lorsqu'un courant plus impétueux vient à les coucher sur ce fond, & le préservent ainsi de la corrosion de l'eau. 2°. Parce que, si dans toute la masse du terrain, dont le fleuve est parvenu à faire à la longue une vallée, il s'est trouvé des pierres ou du gravier, plus propres à résister au lavage des eaux que l'argile ou le sable, ces matières se seront

Digitized by Google

dépoſées dans le fond du lit, en lui donnant une conſiſtance que les bords, compoſés de terre vierge, ne peuvent avoir. 3°. En ſuppoſant même que la violence de l'accrue périodique ait un peu approfondi le lit, lorſque cette accrue ſera paſſée, le régime ſe rétablira par le dépôt du limon le plus délié, que le fleuve chariera encore; & la largeur du lit reſtera augmentée en plus grand rapport que la profondeur.

80. Concluons donc que le lit d'une rivière ne peut avoir de ſtabilité réelle, que lorſqu'il eſt capable d'écouler toutes les eaux des crues extraordinaires, avec une viteſſe égale à celle qui convient à la ténacité du ſol de ſon fond & de ſes rives; que cette ténacité étant communément plus grande dans le fond que dans les berges, la ſection doit prendre à la longue beaucoup plus de largeur que de profondeur; que le point où le régime eſt exact ayant commençé autrefois à l'embouchure, s'avance inceſſamment, en remontant vers la ſource; qu'il y a des rivières plus formées à cet égard les unes que les autres, mais que le régime ne ſera établi, ſur tout leur cours, que dans un avenir encore fort éloigné; que plus le régime fait de progrès, plus les eaux des accrues extraordinaires ou périodiques mettent de temps à arriver vers l'embouchure, & moins au contraire pour ſe faire ſentir au lieu où le régime ceſſe d'être obſervé; & enfin que, hors le tems de ces accrues extraordinaires, le lit peut ſubſiſter avec une viteſſe

Digitized by Google

moindre que celle du régime, ſans ſe combler ni ſe rétrécir ſenſiblement, parce qu'alors ſes eaux ſont claires, & ne charient point de limon groſſier; du moins celui qui peut alors s'y dépoſer eſt enlevé à chaque accrue qui ſurvient.

CHAPITRE V.

Des ſinuoſités du lit des rivières. De la ſtabilité de la figure du lit dans le cours direct, ou aux coudes.

81. Nous avons vu dans le chapitre précédent que le lit des fleuves s'eſt creuſé peu à peu dans la terre, le ſable, la craie, & même dans les terrains qui ſont devenus aujourd'hui du roc, par la ſucceſſion des tems: la variété de ces terrains, les obſtacles différens qui ont réſiſté au choc de l'eau, ont obligé les rivières à s'écarter de la rectitude naturelle de leur cours, à former différens contours dans les plaines, à tourner autour des hauteurs qu'elles n'ont pu applanir, à ſerpenter dans les vallées & dans les prairies. Les lignes droites ne ſe rencontrent preſque jamais dans les opérations libres de l'eau, & les rivières les plus droites ſont celles dont la rapidité ou le volume ſont le plus conſidérables, comme le Danube, le Rhin, le Rhône, le Pô, &c. Les autres ſont communé-

Digitized by Google

ment plus tortueuſes, ſuivant la nature des terrains qui ſe ſont trouvés ſur leur paſſage; mais comme leur action eſt continuelle, quoique lente, elles ſont parvenues, dans la ſuite des ſiécles, à un état de permanence & de ſtabilité qui éprouve aujourd'hui peu de changemens, du moins vers la fin de leur cours, à moins que l'art des hommes, ou quelque révolution ne les oblige à changer leurs opérations.

82. Tout dans la nature eſt aſſujetti à la loi de l'équilibre : cette loi eſt le modérateur univerſel du mouvement; elle ſe trouve dans la détermination de la viteſſe d'un fleuve, dans l'établiſſement de ſon lit, dans la détermination même de la figure de ſa ſection, & de l'angle ſous lequel il peut s'écarter de la ligne droite, pour changer la direction de ſon cours, en formant un coude. Cette matière eſt importante par elle-même, & mérite bien d'être approfondie; car ſi on a des travaux à faire au lit des rivières, s'il s'agit d'une opération qui tende à changer le travail de la nature, il eſt d'une extrême conſéquence de ne point déroger à ſes lois, qui ſont impreſcriptibles, comme leur auteur eſt immuable; & l'on eſt tôt ou tard puni de leur infraction.

83. Je dis d'abord que, dans un régime parfait, le lit a de la régularité dans ſes dimenſions générales de largeur & de profondeur : ſi quelque accident vient à troubler l'ordre naturel, l'eau ſe met auſſitôt à l'ouvrage, pour réparer ce déſordre:

Digitized by Google

elle travaille ſans relâche pour y parvenir, ſoit en rétabliſſant toutes choſes dans leur premier état, ou en ſuppléant quelqu'autre forme équivalente; mais la fin eſt toujours le rétabliſſement de l'équilibre. Par exemple, ſi on ſuppoſe que le lit d'une rivière bien réglée vienne à être creuſé par une force étrangère, ſur une portion de ſon cours, ou que ſa largeur vienne à être augmentée, ſans qu'il ſoit ſurvenu de changement à la pente générale; comme ſa dépenſe n'eſt point augmentée, quoique la ſection ſoit devenue plus grande, la viteſſe diminuera néceſſairement dans la partie du lit qui ſe trouvera altérée, & les dépôts ſucceſſifs des accrues répareront le dommage, & remettront le lit & les berges dans leur état primitif & ordinaire.

Il eſt vrai qu'on voit quelquefois dans les rivières la profondeur ſuppléer à la largeur, ou la largeur à la profondeur; mais c'eſt toujours un état forcé, puiſqu'alors la pente de la ſurface de l'eau en eſt troublée, & qu'elle n'a plus d'uniformité: on eſt donc fondé, quand cela arrive, à ſuppoſer l'exiſtence de quelque obſtacle caché, qui oblige l'eau à ſubſtituer une des dimenſions de ſon lit à l'autre; & on peut conclure que le terrain du lit n'eſt pas homogène. De même ſi on voit une rive fort plate, & l'autre beaucoup plus rapide, on peut aſſurer que l'une eſt formée d'un terrain ſans conſiſtance, & l'autre, d'un ſol plus tenace, ou que le fond du lit eſt irrégulier, & que le

Digitized by Google

courant ſe jette contre la rive la plus droite, & menace de la miner; car le lit doit naturellement obſerver de la régularité dans la ſymmétrie de la ſection.

84. J'ai déja dit que la figure naturelle d'un lit creuſé dans la terre ne peut pas être rectangulaire, parce que les terres communes ne peuvent ſe ſoutenir à plomb, ſans s'ébouler, en prenant un talud quelconque : cette raiſon exclut auſſi la forme demi-circulaire. La trapèze, compoſée de trois lignes droites, offrant des taluds ſuffiſans, ſympathiſe davantage avec la nature des terres; mais l'eau n'aime point les lignes droites; ſi l'art les emploie, elles ſont bientôt attaquées par ce fluide, dont elles gênent l'indépendance, ou recouvertes & enſevelies ſous des dépôts de limon qui reprochent à l'artiſte l'inutilité de ſon travail. Le fond du lit, formé par la nature, eſt une courbe qui, à partir du milieu du courant, ſe relève inſenſiblement & de plus en plus vers les bords, en proportionnant la roideur de ſes pentes à la diminution des viteſſes des filets d'eau, & à l'énergie des molécules du lit qui doivent leur réſiſter.

Si la ſection du lit étoit un demi cercle BCD, la viteſſe en C ſeroit, avec celle en A, dans un rapport qui dépend, comme nous l'avons vu, de l'intenſité de la viteſſe même; mais cette viteſſe à la paroi ſeroit la même dans toute la circonférence BCD : or, la rive, preſque verticale aux bords D & B, ne peut ſubſiſter ſans éboulement, Fig. 8.

d'où il ſuit que le lit prendra la figure GCEF. Le rapport de la viteſſe aux points A & C pourra demeurer conforme à la loi, mais la viteſſe au point F ſera plus petite qu'elle n'étoit auparavant en D & en C, & celle au point E ſera moindre que celle en C, mais plus grande que celle en F. Les viteſſes à la paroi vont donc en décroiſſant par degrés depuis C juſqu'en F, tandis que la roideur des plans exprimés par la courbe, ſur leſquels ſont ſituées les molécules terreuſes qui font le lit, va en augmentant; la viteſſe en F reſte finie, & l'obliquité du talud qui convient à la nature du terrein reſte finie auſſi. Ainſi, au point C, c'eſt-à-dire ſur un plan horizontal, les molécules ont plus d'énergie pour réſiſter au choc de l'eau & à ſes tournoiemens, qui les attaquent quelquefois dans tous les ſens; mais auſſi la viteſſe à la paroi eſt plus grande qu'ailleurs. Au point E, la pente du plan donne plus d'avantage à l'eau, pour détacher la molécule du lit, & la faire deſcendre en bas, ou l'emporter avec elle; mais la viteſſe eſt moindre, & ainſi des autres points. Concluons donc qu'afin que la figure de la ſection ſoit permanente & durable, il faut que l'inclinaiſon des plans, dont l'enſemble forme la courbe du lit, ſoit relative à la viteſſe des filets d'eau qui ſe meuvent le long de ces plans, & à la ténacité du terrain, dont la variété influe ſur le paramètre de cette courbe.

85. D'après toutes ces conſidérations, on pourroit douter ſi le régime exact peut ſubſiſter dans

Digitized by Google

le coude d'une rivière, au point où elle se détourne pour prendre une nouvelle direction : peut-être qu'à la rigueur il est impossible que le régime y soit permanent, sur-tout si la rivière est sujette aux accrues périodiques; mais l'expérience prouve que quand l'eau a travaillé elle-même l'arrondissement d'un coude pendant un grand nombre d'années, toutes choses s'y arrangent de manière que, par certaines compensations, & suivant certaines lois, qui y sont très-bien observées, ce coude acquiert une stabilité sensible. Les conditions les plus indispensables pour cela sont renfermées dans la proposition suivante.

PROPOSITION.

86. Pour que le lit d'une rivière ait de la stabilité à l'arrondissement d'un coude, il faut, 1°. que la profondeur de l'eau y soit plus grande qu'ailleurs. 2°. Que le fil d'eau du milieu du lit, après avoir frappé la digue ou la rive concave de l'arrondissement, soit réfléchi sous le même angle dans la ligne du milieu du lit en dessous du coude. 3°. Que l'angle d'incidence soit proportionné à la ténacité du terrain. 4°. Qu'il y ait à ce coude une augmentation de pente, ou une charge capable de vaincre la résistance du coude.

DÉMONSTRATION.

Soit une rivière qui coule dans le lit Fig. 9.

Digitized by Google

ABEHLKIMCD, composé de deux parties droites, jointes par un coude arrondi.

Je dis d'abord qu'afin que ce coude ait de la stabilité, il faut que la profondeur de l'eau y soit plus grande que dans les parties droites du lit, au dessus & au dessous; car en considérant comment l'eau doit passer à ce coude, on voit qu'elle éprouve une résistance invincible de la part de l'arc concave BEH; mais qu'en trouvant moins vers M, le fil de l'eau doit se détourner de la première direction NV, & se jeter vers VM, en se rapprochant de l'arrondissement convexe, au lieu de poursuivre suivant VE. En effet, si on suppose, comme cela est naturel, que l'eau soit de niveau aux points correspondans B, C; E, M; H, I, on voit que la pente de l'eau, en suivant CMI, est beaucoup plus grande qu'en suivant BEH, & ainsi à proportion dans les autres arcs concentriques, qu'on pourroit tirer dans le lit; d'où il suit, 1°. que le courant doit être plus rapide contre la rive convexe CMI; 2°, qu'il doit être rétrograde contre la rive concave BEH, où il doit se former un remou ou tournant : considérant ensuite que la vitesse à la surface ne peut augmenter, ainsi que celle du fond, sans augmenter le frottement & la corrosion, le lit doit s'approfondir du côté de la rive CMI, & le talud de cette rive doit devenir plus plat; il est clair qu'au contraire dans la partie BEH, où le courant est moins rapide & rétrograde, le fond doit se relever, & la rive se sou-

Digitized by Google

tenir plus roide, de manière que l'eau y forme ses tournoiemens, par la communication du mouvement du courant principal; d'où il résulte que la section du lit, faite sur la ligne EM, doit être figurée à-peu-près comme EYWM, en supposant le lit ordinaire représenté par E*ab*M. Fig. 10.

Je dis en second lieu que l'arc BEH doit être tel que le fil de l'eau NE étant réfléchi sous l'angle GEP = FEN, se trouve placé au milieu du lit inférieur HLKI : car si cela n'étoit pas, & que, par exemple, le lit inférieur fût EQRM, il s'ensuivroit que le fil de l'eau, réfléchi du point E, iroit frapper en S, & ensuite en T, & qu'en tournoyant ainsi dans le lit, il ne fuiroit pas librement avec la même vitesse qu'il avoit avant d'arriver en E : sa nouvelle vitesse deviendroit donc plus petite que celle qui convient au régime. D'un autre côté, la résistance de la partie concave EH se trouvant diminuée, & n'étant plus égale à celle de l'arc BE, le courant se jetteroit avec trop de force contre la rive EQ, & l'entameroit, tandis que l'arc convexe CM ne pourroit résister à la corrosion du courant, qui y deviendroit trop rapide. Ainsi, par toutes sortes de raisons, il ne pourroit y avoir de stabilité, & l'arrondissement du coude changeroit de figure. Fig. 9.

Troisièmement il faut encore que l'angle d'incidence NEF soit proportionné à la ténacité du terrain; c'est-à-dire qu'il n'excède pas certaines bornes, au-delà desquelles le choc de l'eau contre la partie concave BEH surpasseroit la résistance que

Digitized by Google

la berge peut oppofer par fon inertie : je n'entends pas parler de la réfiftance abfolue de la berge, mais de celle des molécules terreufes dont elle eft compofée ; la partie convexe CMI feroit auffi infailliblement rongée par le courant, qui y deviendroit d'autant plus rapide que l'angle NEP feroit plus aigu, ou celui d'incidence plus grand. Nous verrons ailleurs que l'expérience donne environ 36 degrés, pour l'ouverture du plus grand angle d'incidence, qui convienne à la ftabilité d'un coude dans un terrain argileux ; mais il n'y a aucun inconvénient que cet angle foit plus petit.

Enfin la dernière circonftance, qui accompagne toujours le mouvement de l'eau dans un coude, eft qu'il fe trouve une chute à la furface de l'eau, qui foit capable de vaincre la réfiftance du coude, d'imprimer une viteffe plus grande à la partie du courant qui fe jette vers l'arrondiffement convexe, & de diminuer un peu la pente du lit fupérieur, en augmentant imperceptiblement fa fection. Cette chute occafionne donc une augmentation locale de viteffe, un frottement plus grand, & par conféquent l'approfondiffement dont nous avons parlé ; mais fitôt que la caufe qui a produit tous ces effets, c'eft-à-dire la réfiftance du coude, vient à ceffer, le lit reprend fa forme ordinaire, le fond fe relève, & laiffe dans l'arrondiffement une excavation locale, une efpèce de baffin, dans lequel l'eau n'a point de mouvement propre, parce que le fond a une contrepente : fi elle fe meut, ce

Digitized by Google

n'eſt que d'un mouvement emprunté, & elle ne fait que ralentir & amortir l'impulſion de celle qui coule au deſſus; ſans être abſolument dormante, elle ſert comme de ſauve-garde au fond du lit, qu'elle préſerve de la corroſion, malgré l'inexactitude du régime.

Voilà les différens artifices que la nature emploie pour donner de la ſtabilité aux coudes des rivières qui en paroiſſent d'abord peu ſuſceptibles: voyons à préſent le rapport qu'il y a entre la largeur d'une rivière & le rayon des arcs qui forment l'arrondiſſement pour un angle d'incidence donné.

DÉFINITION.

87. Nous appellerons *angle de bricole* l'angle NEF, ou ſon égal GEP; & le coude d'une rivière, où le courant n'eſt réfléchi qu'une fois, ſera nommé *coude d'une ſeule bricole:* quand il y aura deux réflexions, nous dirons que c'eſt un *coude de deux bricoles*, comme dans la figure 12; & ainſi de ſuite. Fig. 9.

PROBLÊME.

88. L'angle de bricole étant donné, ainſi que la largeur de la rivière, déterminer l'ouverture d'angle que peut avoir un coude d'une ſeule bricole, & tracer l'arrondiſſement de ce coude.

Digitized by Google

SOLUTION.

Fig. 11. 1°. Soit ABC l'angle de bricole donné, & DE la largeur de la rivière, dont DQTE eſt le lit direct ; ſoit tirée FG, qui repréſente le fil de l'eau du milieu du lit ; & au point G, pris à volonté, ſoit fait l'angle FGH, égal à l'angle de bricole donné ABC ; ſoit prolongé HG en I ; & ſoit fait l'angle IGK égal à celui HGF : la ligne GK repréſentera le fil d'eau réfléchi du point G, & par conſéquent l'angle FGK ſera l'angle du coude qu'on cherche, & qui, comme on le voit, eſt égal à 180 degrés, moins deux fois l'angle de bricole.

2°. Pour tracer l'arrondiſſement de ce coude, on remarquera que l'arc de cercle qui repréſente la rive concave, eſt tangent tout à la fois aux trois lignes DL, LM, & HI ; d'où il ſuit, par la propriété du cercle, que ſi on fait PQ = PG, & NO = NG, & qu'aux points Q & O on élève les perpendiculaires QR & OR, leur interſection ſera le centre de l'arc, auquel les trois lignes DL, LM, & HI ſeront tangentes. Du même centre & des ouvertures RQ & RT, on tracera les deux arcs QGO & TS : *c. q. f. t.*

89. Il ſuit de cette conſtruction que le rayon RQ eſt égal à la largeur de la rivière, multipliée par le quarré du ſinus total, diviſé par quatre fois le quarré du ſinus de la moitié de l'angle de bricole ; car l'angle de bricole FGH a pour meſure

Digitized by Google

la moitié de l'arc FQG ; & si on tire la corde GQ, l'angle FGQ aura pour mesure la moitié de l'arc FQ, & sera par conséquent moitié du précédent : ainsi nommant l la largeur de la rivière, S le sinus total, s le sinus de FGQ, QX sera égal à $\frac{l}{2}$, & on aura, par la propriété du cercle, QG moyenne proportionnelle entre QX & QV : ainsi on fera $s : \frac{l}{2} :: S : QG = \frac{Sl}{2s}$; donc $\overline{QG}^2 = \frac{S^2 l^2}{4 s^2}$, mais $\frac{\overline{QG}^2}{QX} = QV$; ainsi $QV = \frac{S^2 l}{2 s^2}$, & le rayon $QR = \frac{S^2 l}{4 s^2}$, c'est-à-dire que le rayon de l'arc concave est égal à la largeur de la rivière, multipliée par une fraction dont le quarré du sinus total est le numérateur, & qui a pour dénominateur quatre fois le quarré du sinus de la moitié de l'angle de bricole.

90. Nous avons dit que si l'arrondissement du coude d'une rivière est stable, il le doit à une certaine ouverture de l'angle de bricole, qui est proportionnée au régime, au dessus de laquelle le courant attaqueroit les rives, & tendroit à changer le lit : il suffit, pour s'en convaincre, d'étudier le cours d'une rivière, dans les coudes où il ne se fait qu'une bricole, ce qui est aisé à connoître ; on verra que lorsque ces coudes ont de la stabilité, les angles formés à ces coudes ne sont jamais au-dessous d'une certaine ouverture. J'ai observé, par exemple, que dans le lit de l'Escaut, qui est creusé dans l'argile, & où la vitesse moyenne du courant est de 20 à 30

Digitized by Google

pouces par ſeconde, dans le tems de ſes crues, les plus petits angles de coude n'ont pas moins de 108 degrés d'ouverture, lorſqu'il ne s'y forme qu'une bricole; ce qui fixe le plus grand angle de bricole, convenable à la ſtabilité, à 36 degrés; mais il n'y a aucun inconvénient que cet angle ſoit plus petit, & celui du coude plus ouvert : cette ouverture du plus grand angle de bricole dépend ſans doute de la ténacité du terrain; & après avoir obſervé celle qui convient à chaque rivière & à chaque nature de terrain, il faut s'y conformer, ſans oſer courir les riſques de faire des angles plus petits que la nature ne l'indique.

91. Si, l'angle de bricole étant toujours donné, ainſi que la largeur de la rivière, le courant formoit deux bricoles contiguës, tellement que le fil de l'eau fût HFGI, l'angle de coude ſeroit égal à 180 degrés, moins quatre fois l'angle de bricole; car (88) l'angle HFG vaut 180 degrés, moins deux fois l'angle de bricole : ainſi l'angle DFG & ſon égal DGF valent chacun deux fois l'angle de bricole; leur ſomme vaut donc quatre fois l'angle de briole; & comme les trois angles d'un triangle valent enſemble deux droits, il ſuit que l'angle FDG ou ſon égal K, vaut 180 degrés, moins quatre fois l'angle de bricole. Pour tracer l'arrondiſſement dans l'ouverture de l'angle connu AKE, on cherchera (88) le rayon qui convient à l'angle de bricole, ou la valeur de CM, & on aura le triangle rectangle MCK, dans lequel deux angles & un côté ſont

Fig. 12.

Digitized by Google

ſont connus. Ainſi, on trouvera le côté KM, qui déterminera le point M, centre de l'arrondiſſement.

92. Si le coude devoit être de trois bricoles contiguës, les deux branches de ce lit, jointes enſemble par l'arrondiſſement, formeroient enſemble un angle de plus ou moins 180 degrés, moins ſix fois l'angle de bricole, ainſi de ſuite pour un plus grand nombre de bricoles; d'où on fait la propoſition ſuivante.

PROPOSITION.

Deux branches de lit rectilignes, jointes enſemble par un arrondiſſement d'un nombre quelconque de bricoles, forment entre elles un angle affecté du ſigne + ou —, qui eſt égal à 180 degrés, moins l'angle de bricole, multiplié par le double du nombre des bricoles.

Ainſi, en nommant a l'angle de bricole, c l'angle de coude, & n le nombre de bricoles, on a $\pm c = 180° - 2na$; d'où l'on tire $a = \frac{180° \pm c}{2n}$.

D'après toutes ces connoiſſances, on eſt en état de faire paſſer les ſinuoſités d'une rivière par des points donnés quelconques, comme on va voir dans le chapitre ſuivant.

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

Du tracé des ſinuoſités des rivières. Problême général des arrondiſſemens.

93. POUR donner un exemple général, dans lequel ſe trouvent des ſinuoſités de toutes les formes, & montrer la manière dont on peut contourner un lit, pour le faire paſſer à un point quelconque, pour alonger ou raccourcir ſon cours, de manière à ménager ſa pente, & à lui donner la viteſſe de régime convenable, & de la ſtabilité dans ſes coudes, nous allons réſoudre le problême ſuivant, dans lequel nous ferons abſtraction de ſa pente, pour ne nous occuper d'abord que de ſes ſinuoſités. Nous parlerons dans le chapitre ſeptième de l'augmentation de pente qui eſt néceſſaire pour vaincre la réſiſtance des différentes inflexions du lit, ce qui déterminera le choix qu'on pourroit être obligé de faire entre des développemens plus ou moins grands, ou des arrondiſſemens d'un plus grand ou d'un moindre nombre de bricoles.

PROBLÊME.

94. Suppoſant donné le plus grand angle de bricole qui convient au régime d'une rivière dont la largeur eſt donnée, tracer les ſinuoſités de cette

Digitized by Google

rivière ſous des angles donnés quelconques, de manière qu'elles aient de la ſtabilité.

Soit une rivière ACDEGH, &c. dont la largeur ſoit l, & qui doit former pluſieurs contours, ſavoir, 1°. un coude, ſous un angle B de 30 degrés d'ouverture; 2°. un arrondiſſement en demi cercle, contenant 3 bricoles égales; 3°. un arrondiſſement en poire, contenant 5 bricoles, ſous l'angle F de 45 degrés; 4°. un coude ſous un angle K de 38 degrés; 5°. un autre coude ſous un angle de 150 degrés; 6°. un arrondiſſement en demi cercle, contenant 4 bricoles; 7°. un arrondiſſement en poire, contenant 6 bricoles, ſous un angle de 36 degrés; 8°. un coude ſous un angle droit; 9°. enfin, un arrondiſſement mixte, ſous différens angles contigus. On ſuppoſe auſſi que le plus grand angle de bricole relatif au régime ſoit de 36 degrés; on demande le tracé de cette rivière, & les rayons des différens arrondiſſemens. Fig. 13.

SOLUTION.

1°. Le premier coude devant ſe former ſous un angle de 30 degrés, il eſt néceſſaire qu'il s'y forme 3 bricoles; car s'il n'y en avoit que deux, la formule $a = \frac{180° - c}{2n}$ deviendroit $a = \frac{180° - 30}{4}$; d'où l'on tire $a = 37\frac{1}{2}$, qui eſt plus grand que l'angle de régime: ainſi, on aura $a = \frac{180° - 30}{6}$; donc $a =$ 25°. Nommant donc, comme ci-devant, s le ſinus

Digitized by Google

de 12°, 30′, moitié de a, S le ſinus total, que nous pouvons ſuppoſer égal à 1,00000, & R le rayon de l'arc concave AC, on aura $R = \frac{S^2 l}{4s^2}$; or, $s = 0,21643$, dont le quarré eſt 0,4684, dont le quadruple eſt 0,18736 : or, ſi l'on diviſe le quarré du ſinus total, qui eſt 1, par 0,18736, le quotient eſt 5,33. Ainſi, on aura $R = l \times 5,33$, c'eſt-à-dire que le rayon de l'arrondiſſement AR ou RC eſt égal à la largeur de la rivière multipliée par $5\frac{1}{3}$. Pour placer le point R, on cherchera dans le triangle ABR la valeur BR, au moyen du côté AR, & des deux angles connus, en faiſant ſin. 15° : 5,33 : : ſin. tot. : BR = 20,59, largeurs de la rivière.

2°. L'arrondiſſement en demi-cercle, dont DE eſt le diamètre, devra être au moins de trois bricoles, & il ne peut en avoir moins, parce que l'angle de bricole excéderoit 36 degrés. L'angle de coude étant nul, la formule devient $a = \frac{180° - 0}{6}$, d'où l'on tire $a = 30°$, $\frac{a}{2} = 15°$, dont le ſinus eſt 0,25881, & le quadruple du quarré de ce ſinus eſt 0,2679, par leſquels il faut diviſer 1,0000. Le quotient eſt 3,73 ; ainſi, $R = l \times 3,73$.

3°. Le troiſième arrondiſſement ayant la forme d'une poire, & devant contenir 5 bricoles ſous un angle rentrant de 45 degrés, la formule devient $a = \frac{180° + 45}{10}$, où l'on voit que l'angle de coude eſt affecté du ſigne +, parce que l'angle eſt ren-

Digitized by Google

trant. On aura donc $a = 22^\circ \frac{1}{2}$, & $\frac{a}{2} = 11^\circ \frac{1}{4}$, dont le ſinus eſt 0,19509. Le quadruple du quarré de ce ſinus eſt 0,1524, par leſquels diviſant 1,0000, on a 6,56 pour quotient : ainſi, $R = l \times 6,56$. Pour avoir la diſtance du centre de cet arrondiſſement au ſommet de l'angle F, on fera ſin. RFG : 6,56 :: ſin. tot. : un quatrième terme, qui ſera la valeur de FR exprimée en largeurs de la rivière.

4°. L'arrondiſſement ſuivant eſt un coude qui fait un angle de 38 degrés : ce coude peut n'être que de deux bricoles ; car la formule $a = \frac{180 - c}{2n}$ devient $a = \frac{180^\circ - 38}{4}$, qui donne $a = 35^\circ \frac{1}{2}$, dont la moitié eſt $17^\circ \frac{3}{4}$; le ſinus de cet angle eſt 0,30486 ; le quadruple du quarré de ce ſinus eſt 0,3717, par lequel diviſant 1,0000, il vient 2,69. ainſi $R = l \times 2,69$.

5°. Le coude qui ſe préſente enſuite, a 150 degrés d'ouverture, avec une ſeule bricole. Ainſi on a $a = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2}$, ou bien $a = 15^\circ$, & $\frac{a}{2} = 7^\circ \frac{1}{2}$ dont le ſinus eſt 0,13052 ; le quadruple du quarré de ce ſinus eſt 0,0681, par leſquels diviſant 1,0000, le quotient eſt 14,83. Ainſi $R = l \times 14,83$.

6°. On propoſe enſuite un arrondiſſement en demi-cercle, qui diffère du précédent en ce qu'il doit contenir quatre bricoles, au lieu de trois ; ainſi on aura $a = \frac{180^\circ - 0}{8}$, d'où l'on tire $a = 22^\circ \frac{1}{2}$, &

Digitized by Google

$\frac{a}{2} = 11^{\circ}\frac{1}{4}$, dont le ſinus eſt 0,19509, & le quadruple du quarré de ce ſinus eſt 0,1524, par leſquels diviſant 1,0000, on trouve pour quotient 6,56. Ainſi $R = l \times 6,56$.

7°. Le ſeptième arrondiſſement a la forme d'une poire, & doit contenir ſix bricoles ſous un angle rentrant de 36 degrés; ainſi la formule devient $a = \frac{180+36}{12}$, d'où l'on tire $\frac{a}{2} = 9$ degrés, dont le ſinus eſt 0,015643; le quadruple du quarré de ce ſinus eſt 0,0978, par leſquels diviſant 1,0000, on trouve pour quotient 10,22. Ainſi $R = l \times 10,22$.

8°. On propoſe en huitième lieu un coude ſous l'angle de 90 degrés; ce coude ne peut pas contenir moins de deux bricoles, par la raiſon qu'on a vue ci-deſſus; ainſi on aura $a = \frac{180^{\circ} - 90^{\circ}}{4}$, d'où l'on tire $\frac{a}{2} = 11^{\circ}\frac{1}{4}$, dont le ſinus eſt 0,19509; & $R = l \times 6,56$, comme au ſixième arrondiſſement.

Fig. 14. 9°. Enfin, on propoſe un arrondiſſement mixte, ſous différens angles contigus, qui vont en augmentant, ou ſous différens complémens, qui vont en diminuant, comme H, F, D, A; on trouvera de même le rayon qui convient à chacun, en opérant comme ſi chaque coude étoit iſolé. L'enſemble de ces arrondiſſemens préſente une ſpirale IGECB, qui n'a rien de défectueux, & qui convient avec la ſtabilité, pourvu que le plus petit angle de coude ſoit relatif au plus grand angle de bricole que le régime peut ſupporter.

Digitized by Google

95. Ces exemples font voir qu'il peut se trouver une variété infinie dans les différens contours que forment les rivières, sans que leur stabilité soit altérée ; mais on sent bien aussi qu'en s'écartant de ces règles, on s'expose aux fouilles, à l'éboulement & à la rupture des digues, aux variations du lit, à la formation des isles, à la diminution de la dépense, & à mille désordres semblables. Résumons en peu de mots quelques règles principales, qui suivent des principes que nous venons d'établir.

96. Si on suppose le plus grand angle de bricole, compatible avec le régime, égal à 36 degrés, le diamètre du plus petit arrondissement en demi-cercle doit surpasser sept fois la largeur de la rivière, & ne peut pas contenir moins de trois bricoles ; s'il s'y en forme quatre, le diamètre de l'arrondissement excédera treize fois la largeur de la rivière ; s'il s'y en forme cinq, le diamètre excédera vingt fois la largeur de la rivière, & ainsi de suite.

D'après ces règles, il semble qu'on devroit conclure que la Marne, près de Carletin, au dessus de Lagny, avant son confluent dans la Seine, faisant, suivant la carte de M. de Cassini, un arrondisse- de 600 toises de rayon pour trois bricoles, comprises dans un angle de coude de 50 degrés d'ouverture, doit avoir environ 84 toises de largeur en cet endroit, si toutefois il n'y a point d'obstacles étrangers.

La Seine, au dessous du même confluent, entre Juvisy & Draveil, faisant un arrondissement de

Digitized by Google

1000 toiſes de rayon pour deux bricoles, compriſes dans un angle de coude de 100 degrés d'ouverture, devroit n'avoir qu'environ 72 toiſes de largeur, & moins que la Marne.

Mais au deſſous de Paris les rayons des arrondiſſemens ſont trop petits par rapport à la largeur de la riviere, dont le cours ſans doute a été gêné par quelque obſtacle; & de-là eſt venue la diſpoſition que la rivière a eue à former des iſles : car le lit ſe diviſant en deux bras plus étroits, pour embraſſer une iſle, tend par ce moyen à rétablir le rapport convenable entre ſa largeur & le rayon des arrondiſſemens.

On peut encore remarquer que la Seine, au deſſous de Rouen, forme deux grands arrondiſſemens, à-peu-près en demi-cercle, à la Bouille & à Ducler, qui ont 15 à 1600 toiſes de rayon pour trois bricoles; d'où on pourroit conclure ſa largeur d'environ 228 toiſes.

Mais ce grand arrondiſſement preſque en demi-cercle, dans lequel eſt ſituée la ville de Rouen, étant compoſé de 4 bricoles, devroit avoir près de 3000 toiſes de rayon, au lieu de 2100 toiſes qu'il a. C'eſt auſſi ſans doute cette irrégularité qui a donné lieu à la formation de pluſieurs iſles qu'on y remarque. On en pourroit dire autant de tous les autres arrondiſſemens ſemblables.

97. Dans la même ſuppoſition, tout angle de coude qui, ſous une ſeule bricole, n'eſt pas moindre que de 108 ou 110 degrés, peut avoir de la

Digitized by Google

ſtabilité, mais s'il eſt plus petit, il ſe fera une fouille un peu au deſſous du point d'incidence, contre l'arrondiſſement de la rive concave; la rive convexe ſera rongée, & le coude n'aura point de ſtabilité. Si donc, pour des raiſons particulières, on ſe trouvoit forcé de pratiquer ou de laiſſer ſubſiſter un pareil coude, il faudroit en revêtir l'arrondiſſement intérieur & extérieur en maçonnerie, ou du moins en murailles de pierres ſèches à grand talud, en calculant à l'ordinaire le rayon de l'arrondiſſement par la méthode preſcrite ci-deſſus, afin que la maſſe du courant ſoit renvoyée avec régularité dans la branche inférieure du lit.

Tout angle de coude qui n'eſt pas moindre que de 36 degrés, peut ne contenir que deux bricoles; mais s'il eſt plus petit, il devra en contenir trois, à moins qu'il ne ſoit revêtu en maçonnerie, & ainſi des autres.

98. Quand on eſt déterminé à revêtir en maçonnerie l'arrondiſſement d'un coude de rivière, on peut fixer à volonté le nombre de bricoles qu'y formera le fil de l'eau; mais il ne faudra pas oublier que plus l'angle de bricole ſera grand, plus il faudra approfondir le lit dans l'étendue de l'arrondiſſement, & enfoncer par conſéquent à proportion la fondation des murs de revêtement, qui courroient riſque, ſans cette précaution, d'être déchauſſés par le courant.

99. En général, il paroît que toutes les fois qu'il s'agira de conduire un fluide dans un canal,

Digitized by Google

tuyau, ou lit quelconque qui n'eſt pas droit, mais qui forme des coudes ou des arrondiſſemens, il eſt convenable de calculer les rayons de ces courbes, d'après les principes qu'on vient de voir, ſoit pour la conſervation des parois, ſi elles ſont de nature à céder à la trop grande action de l'eau; ſoit pour la liberté du cours du fluide, & ſon plus grand débit. L'expérience nous a fait voir qu'un tuyau coudé ſous un angle de 67 degrés 32 minutes, mais dont la bricole étoit régulière, faiſoit le même débit qu'un autre tuyau de même diamètre, dont l'angle de coude étoit de 81 degrés, mais la bricole irrégulière, quoique les charges des deux tuyaux fuſſent ſenſiblement les mêmes; ce qui marque combien l'irrégularité de la répercuſſion du fluide qu'on oblige à ſuivre la branche inférieure mal diſpoſée d'un lit, trouble l'ordre des filets, & dérange l'économie de la viteſſe moyenne. Ce n'eſt pas même aſſez de bien régler la courbure des arrondiſſemens, il faut encore imiter la nature, qui accroît d'elle-même le lit, & ménage une plus grande ſection dans les coudes où la déviation des filets tend à diminuer la dépenſe, ou à augmenter la pente.

Cette remarque & les règles précédentes peuvent également s'appliquer au lit des rivières, aux tuyaux de conduite, à ceux des poëles, aux tuyaux de cheminées, quand ils ſont dévoyés, & généralement à tous les canaux deſtinés à conduire le feu, l'air, les vapeurs ou l'eau.

100. La largeur des rivières nous a ſervi d'é-

Digitized by Google

chelle dans les calculs précédens, pour fixer les rayons des différens arcs de cercle qui conviennent aux arrondiſſemens des ſinuoſités; mais il pourroit y avoir de l'équivoque ſur la valeur de cette meſure: quand les rivières ſont contenues entre des quais de maçonnerie, leur largeur, priſe à la ſurface, ne diffère guères de celle qu'on prendroit au fond; mais quand les rives prennent un talud naturel dans l'argile, le ſable, le gravier, &c. il faut ſe déterminer ſur le choix de la largeur qui doit entrer dans les calculs. Suffit-il auſſi de prendre cette largeur dans le tems des eaux ordinaires, ou faut-il ſe fixer à celle qui a lieu dans le tems des plus grandes crues? Si on déterminoit le rayon des arrondiſſemens d'après la largeur du fond du lit, la bricole ne ſeroit régulière dans le lit, que lors des plus baſſes eaux; ſi au contraire on fixoit ce rayon ſur la largeur à la ſurface du lit, dans le tems des crues, la bricole ne ſeroit exacte que dans cette circonſtance. On ſeroit dans la même alternative pour des rivières ſujettes à des écluſes de retenue, qui, tantôt fermées, tantôt ouvertes, tiennent le lit très-haut ou très-bas. Il faut convenir qu'il eſt bien difficile d'obtenir une ſtabilité parfaite dans un lit qui eſt ſujet à des hauſſemens & baiſſemens alternatifs: outre le premier inconvénient de l'irrégularité de la bricole, il arrive que quand les eaux ſont hautes, les taluds ſe trouvent appuyés par la preſſion de l'eau, ſurtout aux arrondiſſemens concaves, & peuvent ſubſiſter avec

Digitized by Google

une pente qui devient insuffisante quand l'eau vient ensuite à baisser, & à abandonner la berge à tout son poids; il faut presque nécessairement qu'il se fasse alors un affaissement, ou un éboulement, qui est ensuite délavé & emporté par le courant : or, comme c'est toujours aux arrondissemens concaves que les taluds sont plus roides, & qu'au contraire ils sont plus doux & plus alongés à la rive opposée, qui est convexe, il suit que les premiers sont plus sujets à s'ébouler que les seconds, & cela sans remède, parce que les dépôts de l'eau ne peuvent pas s'y arrêter & réparer le dommage, tellement qu'à la longue le lit doit gagner du terrain, ronger la partie concave, & perdre au contraire, en abandonnant la partie convexe; ce qui, au bout de quelques années, change le cours de la rivière, & diminue ou accroît la possession des propriétaires riverains. Il n'est donc pas possible qu'une rivière sujette à de pareilles alternatives ait une stabilité parfaite; & c'est ici que la théorie des tuyaux de conduite l'emporte sur celle des rivières, parce que la figure du lit étant invariable, la forme des arrondissemens est donnée, & ne peut être sujette à aucune incertitude. Néanmoins il faut en revenir au principe, que la stabilité du lit n'étant jamais plus exposée que dans le tems des grandes crues, & la vitesse étant toujours au dessous de celle du régime, lors des basses eaux, il est plus prudent de régler le rayon des arrondissemens des coudes sur la largeur du lit à sa surface, dans

Digitized by Google

le tems des crues ; c'eſt alors qu'il eſt communément plus important qu'une rivière ait un grand débit, & que ſa viteſſe n'éprouve aucune diminution : & d'ailleurs il y a moins d'inconvénient à faire le rayon trop grand, qu'il n'y en auroit à le faire trop petit. Concluons donc que la largeur, qui doit ſervir de meſure pour fixer les dimenſions des arrondiſſemens des coudes, eſt celle qui a lieu à la ſurface de l'eau d'une rivière, dans le tems que ſon lit eſt rempli, ou du moins élevé par les grandes crues de l'hiver.

CHAPITRE VII.

De la réſiſtance occaſionnée par les coudes du lit des rivières & des tuyaux de conduite. Meſure de cette réſiſtance. Augmentation de la pente naturelle.

101. LA nature, dont la marche eſt toujours d'aller à ſes fins par les moyens les plus ſimples, a aſſujetti preſque toutes les rivières à faire un grand nombre de ſinuoſités ſur la longueur de leur cours, en vue de l'établiſſement du régime. Nous avons vu que le défaut d'homogénéité du terrain eſt la cauſe prochaine de cet effet ; mais il en réſulte un avantage bien précieux pour les cantons que chaque rivière arroſe. L'élevation moyenne des terres hautes du globe eſt d'environ 600 pieds au deſſus de la ſurface de la mer ; ainſi la ſource des rivières

Digitized by Google

un peu considérables est à-peu-près à cette hauteur : la longueur de leur cours est très-variée ; mais il résulte du rapport de cette hauteur de la source, divisée par la longueur du lit, que la pente combinée avec la section, qui dépendent l'une & l'autre de la quantité d'eau à écouler par chaque rivière, donneroit toujours une vitesse plus grande que celle qui convient à la ténacité de la terre commune : or, le moyen d'adoucir cette pente est d'augmenter le développement du lit, en lui faisant faire beaucoup de circuits ; par là le régime s'établit beaucoup plus promptement, & dans la vérité les habitans de la terre ne jouissent du bienfait des fleuves & des rivières, que quand leurs eaux, épurées par un cours plus tranquille, & ne coulant plus dans le fond des précipices, se prêtent aux besoins de l'agriculture, aux arrosemens & à la navigation. Plus un fleuve fait de tours, plus la résistance de son lit se trouve multipliée, plus il rencontre d'obstacles à vaincre depuis sa source jusqu'à la mer, plus aussi sa vitesse se modère & se calme ; & au lieu de déchirer les entrailles de la terre, en y creusant un lit profond, où il ne roule avec grand bruit que des rochers & des arbres déracinés, il coule majestueusement à la surface du terrain, qu'il embellit & qu'il fertilise.

102. Nous cherchons ici à déterminer quelle est en effet dans la nature la résistance que produit le coude d'une rivière, c'est-à-dire quelle partie de la force accélératrice est détruite par la dévia-

Digitized by Google

tion des filets, qui se plient dans un lit tortueux, en quittant leur première direction, pour en prendre une autre. En supposant les coudes & les arrondissemens tracés suivant les principes du chapitre précédent, ce qui est une condition absolument nécessaire pour que la loi de la résistance soit constante, on peut présumer d'abord que cette résistance est d'autant plus grande que le quarré de la vitesse est plus grand, c'est-à-dire qu'elle lui est proportionnelle. Considérant ensuite que la veine fluide enfermée & contenue dans le lit, est obligée de se plier d'autant plus que l'angle sous lequel elle est censée frapper la berge & se réfléchir est plus grand, on peut, suivant la théorie ordinaire du choc des fluides, supposer la résistance proportionnelle au quarré du sinus des angles d'incidence; & enfin, s'il se trouve plusieurs bricoles égales ou inégales, dans une longeur donnée du lit, la résistance se répétera autant de fois qu'il y aura de bricoles.

103. Ainsi, en nommant V la vitesse moyenne d'un courant uniforme, s le sinus de l'angle de bricole, & m un nombre constant, la résistance d'une bricole seroit représentée par $\frac{V^2 s^2}{m}$, & celle de plusieurs bricoles égales seroit $\frac{V^2 s^2 n}{m}$, en nommant n le nombre des bricoles.

Pour comparer ce résultat à l'expérience, & trouver la valeur du nombre constant m, au cas que la loi des vitesses & du sinus des angles soit vraiment observée, il falloit se déterminer sur le

Digitized by Google

choix des obſervations : il paroiſſoit difficile d'en faire d'exactes ſur les rivières naturelles un peu grandes, quoique par la comparaiſon de leurs viteſſes réelles, affectées de pluſieurs ſinuoſités, à celles qu'on calcule par la formule du mouvement uniforme dans un lit droit, on puiſſe s'appercevoir que les viteſſes réelles y ſont trop petites, ou la pente du lit trop grande ; il ne l'étoit pas moins d'en faire ſur un canal factice, qu'il auroit fallu contourner, modeler & régler, & dans lequel, en commettant les moindres erreurs poſſibles, la foible réſiſtance de quelques coudes eût pu échapper à l'obſervateur. Nous avons donc eu recours aux tuyaux, qui préſentent l'avantage de la facilité de la meſure de la charge & de la dépenſe, ſans compter qu'on peut y produire de très-grandes viteſſes, & y varier à peu de frais les arrondiſſemens & les angles de bricole.

Cette manière d'obſerver la réſiſtance des coudes eſt d'autant plus convenable, que la grandeur du lit ne doit entrer pour rien dans l'intenſité de la réſiſtance enviſagée de cette manière : car il en eſt de même de la réſiſtance cauſée par la déviation des filets à l'entrée d'un orifice, c'eſt-à-dire, de l'augmentation de charge, qu'il eſt néceſſaire d'appliquer à la tête d'un tuyau additionnel quelconque, pour lui imprimer telle viteſſe qu'on veut. Nous avons vu (9) que la charge, dans ce cas, eſt égale à $\frac{v^2}{478}$, tandis que celle qui produiroit la même viteſſe, ſi l'orifice ne cauſoit pas de réſiſtance, ſeroit

ſimplement

ſimplement $\frac{V^2}{724}$: ainſi la charge due à la réſiſtance eſt exprimée par $\frac{V^2}{478} - \frac{V^2}{724} = \frac{V^2}{1407}$ environ, & cette expreſſion eſt toujours celle qui convient ſenſiblement à toutes ſortes de tuyaux additionnels, quelque diamètre qu'on leur donne.

104. Nos expériences ſur les tuyaux coudés, qu'on verra en détail dans la troiſième partie de cet ouvrage, prouvent très-bien 1°. que l'augmentation de charge néceſſaire pour vaincre la réſiſtance des coudes, eſt proportionnelle au quarré des viteſſes, ce que nous avons vérifié de diverſes manières, & ſur des tuyaux de différentes longueurs & de diamètres différens; 2°. que la réſiſtance de ces coudes, ou l'augmentation de charge qui la repréſente, eſt proportionnelle au quarré du ſinus des angles de bricole, pourvu que ces angles n'excèdent pas une certaine meſure, comme de 36 à 40 degrés : au-delà de cette ouverture d'angle, l'engorgement, formé à des angles de coude trop aigus, augmentoit beaucoup la réſiſtance, ce qui probablement ne ſeroit pas arrivé, ſi nous avions eu la précaution d'augmenter l'aire de la ſection des tuyaux à l'endroit des coudes, comme cela ſe fait naturellement dans les rivières; 3°. que, dans un même tuyau, auquel on adaptoit différens nombres de coudes, la réſiſtance croiſſoit comme le nombre des coudes.

105. Pour connoître l'intenſité abſolue de la réſiſtance, l'expérience la plus convenable eſt la

Digitized by Google

104e, dans laquelle se réunissent plusieurs avantages, que les autres n'ont pas au même degré : la vitesse y étoit bien uniforme, & le régime établi, ce qui n'avoit pas lieu dans le tuyau d'un pouce de diamètre, & de 24 pouces de longueur seulement, ni dans celui de deux pouces de diamètre, & de 255$^{po.}$,25 de longueur : outre cela, nous avions réuni dans ce même tuyau dix bricoles, de 36 degrés chacune, avec une vitesse de plus de 71 pouces par seconde.

L'augmentation de charge nécessaire pour imprimer même vitesse dans ce tuyau que quand il étoit droit, & qu'il avoit même longueur, s'est trouvée de 5$^{po.}$,905 ; ainsi celle qui répondoit à une seule bricole de 36° étoit 0$^{po.}$,5905 ; & on avoit la vitesse ou $V = 71,59$; $s = 0,58778$, en faisant le sinus total égal à 1. La valeur de la résistance (103) exprimée par $\frac{V^2 s^2}{m}$ devient donc $\frac{5125,128 \times 0,345485}{m} = 0,5905$, d'où l'on tire $m = 2998,5$, qu'on peut, sans erreur sensible, prendre pour 3000.

La formule qui exprime la résistance d'une bricole quelconque, dans les tuyaux de conduite, est donc $\frac{V^2 s^2}{3000}$. La table suivante sert à faire voir que les résistances trouvées par l'expérience, relatives à différentes vitesses & à différentes bricoles, plus ou moins nombreuses, dans des tuyaux de différentes longueurs, où le régime étoit établi, sont sensiblement conformes à celles que donne la théorie. La première colonne montre les numéros des expé-

Digitized by Google

riences; la seconde exprime le nombre des bricoles & l'ouverture des angles d'incidence; la troisième, les vitesses de l'eau dans les tuyaux; la quatrième; le quarré de ces vitesses; la cinquième, l'augmentation de charge, ou la résistance donnée par l'expérience; & la sixième, l'augmentation de charge, ou la résistance calculée par la formule.

NUMÉROS des expériences.	NOMBRE de bricoles & de degrés des angles de bricole ou d'incidence.	VITESSE par seconde, commune aux tuyaux droits & aux tuyaux coudés, suivant l'expérience.	QUARRÉ de la vitesse de l'eau dans les tuyaux droits ou coudés.	AUGMENTATION de charge pour vaincre la résistance des coudes, suivant l'expérience.	AUGMENTATION de charge, ou résistance suivant la théorie.
Tuyau d'un pouce de diamètre, & de 117 pouces de longueur.					
		po.	po.	po.	po.
90	3 bric. de 36° 0	84,945	7216,953	2,49	2,49
91	2 36.° 0	id.	id.	1,5	1,66
93	4 24. 34	id.	id.	1,5	1,66
94	3 24. 34	id.	id.	1,12	1,24
92	1 36	id.	id.	0,75	0,83
95	2 24. 34	id.	id.	0,75	0,83
96	1 24. 34	id.	id.	0,37	0,41
104	10 36. 0	71,59	5125,128	5,905 base.	5,905
Tuyau d'un pouce de diamètre, & de 138 pouces de longueur.					
105	4 36. 0	58,808	3458,38	1,64	1,59
Tuyau d'un pouce de diamètre, & de 117 pouces de longueur.					
99	4 36. 0	58,438	3415,0	1,5	1,57
100	2 36. 0	id.	id.	0,75	0,78
102	4 24. 34	id.	id.	0,75	0,78
101	1 36. 0	id.	id.	0,37	0,39
Tuyau d'un pouce de diamètre, & de 138 ½ pouces de longueur.					
106	4 36. 0	29,33	860,34	0,41	0,396
Tuyau d'un pouce de diamètre, & de 737 pouces de longueur.					
107	4 36. 0	28,657	821,5	0,39	0,378

Digitized by Google

106. L'application de cette théorie aux tuyaux inclinés & au lit des rivières eſt bien facile à faire.
Fig. 15. Soit AB la hauteur entière d'un réſervoir ABIK, BC la longueur horizontale d'un tuyau, dans lequel ſe trouvent un ou pluſieurs coudes, qui contiennent un certain nombre de bricoles égales ou inégales. La charge entière AB doit être conſidérée comme partagée en trois parties, deſtinées chacune à une fonction différente : la première AD ſera employée à imprimer la viteſſe avec laquelle l'eau coulera dans le tuyau, & par l'orifice C ; la ſeconde DE ſervira à vaincre la réſiſtance des coudes, & la troiſième EB doit vaincre la réſiſtance ordinaire du tuyau BC, ſur toute ſa longueur développée : or, ſi dans cet état, à partir du point D, on fait DH = BC, & qu'on ſubſtitue en place de BC le tuyau incliné DH, coudé de la même manière que BC, l'eau y aura la même viteſſe, & la réſiſtance des coudes répandus ſur la longueur DH y ſera vaincue. Or, ſi on prolonge ce tuyau indéfiniment vers L, en répétant à l'infini les mêmes coudes, ſur une ſuite de longueurs égales chacune à DH, le mouvement s'y perpétuera toujours uniformément, avec la première viteſſe due à la charge AD, parce que la pente du tuyau ſe trouve augmentée ſur chaque longueur égale à DH, d'une quantité qui ſuffit pour vaincre la réſiſtance des coudes qui y ſont faits : mais la vraie pente, dans les deux cas, ſera BE + ED, diviſée par la longueur développée des tuyaux BC ou DH.

Digitized by Google

Nous avons vu (22 & 23) que le mouvement uniforme, dans un tuyau incliné, étoit le même que celui d'une rivière; ainsi, on doit conclure que quand une rivière forme des sinuosités qui se répètent à-peu-près régulièrement par intervalles égaux, sa pente est composée de celle qui est nécessaire pour vaincre la résistance de son lit, conformément à la formule du mouvement uniforme, plus celle qui est nécessaire pour vaincre la résistance de ses coudes.

107. Soit donc une rivière, qui a des sinuosités telles que, sur la longueur de 600 toises, elle forme un certain nombre de coudes, composés ensemble d'un certain nombre de bricoles, dont les angles sont connus, & que sa vitesse moyenne soit de 20 pouces par seconde : si je veux connoître sa pente entière sur 600 toises, je commencerai par chercher, au moyen de la formule (50), quelle est la valeur de b, eu égard à sa vitesse & à son rayon moyen, en exprimant par $\frac{1}{b}$ la pente nécessaire pour vaincre la résistance du lit. Supposons que cette pente soit $\frac{1}{21600}$, qui revient à deux pouces pour une longueur de 600 toises ou de 43200 pouces ; mais s'il s'y fait 10 bricoles, de 30 degrés chacune, sur cette même longueur, je chercherai par la formule $\frac{V^2 s^2}{3000}$ quelle est l'augmentation de charge ou de pente qui convient pour vaincre la résistance de ces dix bricoles; je la trouverai de $\frac{2}{3}$ de pouce, qui, ajoutés

à 2 pouces, font une pente totale de 2 pouces 8 lignes, ſur une longueur de 600 toiſes, qui peut enfin être exprimée par $\frac{1}{16200}$.

On voit par cet exemple qu'une pente réelle, égale à $\frac{1}{16200}$ ne produit réellement qu'une viteſſe due à $\frac{1}{21600}$, à cauſe de la réſiſtance des coudes ; ce qui confirme ce que j'ai dit, que les ſinuoſités des rivières ſont un moyen que la nature emploie pour hâter l'établiſſement de la viteſſe de régime, malgré l'excès apparent de la pente. Il eſt un ſecond moyen, l'élargiſſement du lit : nous en parlerons tout-à-l'heure en traitant des accrues permanentes.

Digitized by Google

SECTION III.

Application de la théorie du mouvement uniforme à la pratique.

108. JUSQU'ICI nous avons étudié les lois que la nature s'eſt preſcrites dans l'économie & l'adminiſtration de l'élément qui joue un rôle ſi important à la ſurface du globe. Nous nous propoſons, dans cette troiſième ſection, d'appliquer les principes que nous avons puiſés dans l'expérience, ou du moins qui ſont avoués par elle, à l'examen des principaux réſultats de ce que l'art a imaginé, pour borner les effets naturels, ou les appliquer aux beſoins de la ſociété. Nous allons donc conſidérer ſucceſſivement les effets des accrues, des redreſſemens qu'on peut faire pour éviter les inondations, de l'établiſſement des ponts, des écluſes & des reverſoirs, des canaux en général & de leur plus grand effet, ſurtout pour deſſécher un pays; & enfin des ſaignées des rivières & des canaux. Nous tâcherons de donner la ſolution des problêmes les plus intéreſſans, & dont l'application eſt ou plus fréquente ou plus utile. Quoique la théorie du mouvement uniforme ſoit toujours la baſe de ce que nous avons à dire ici, nous aurons cependant occaſion de parler du mouvement varié de l'eau,

Digitized by Google

dont l'irrégularité ſemble ſe ſouſtraire aux recherches de la théorie, mais qui eſt néanmoins ſoumis à des loix auſſi immuables que l'autre.

CHAPITRE I.

Des accrues permanentes des rivières ; des hauteurs de leur ſource ; des accrues périodiques.

109. NOUS avons fait voir (71) que chaque eſpèce de ſol eſt capable de réſiſter à l'effort du courant qui l'attaque avec une viteſſe relative à ſa ténacité ou à ſon inertie. Il eſt vrai que dans nos expériences le fond du canal étoit un madrier, qui donnoit peu d'appui au gravier & aux galets arrondis, ce qui pourroit porter à croire que nous avons trouvé les viteſſes de régime de ces matières trop petites, & que dans un fond raboteux & inégal elles réſiſteroient à des viteſſes plus grandes. Quoi qu'il en ſoit, il peut arriver qu'un lit paroiſſe avoir de la ſtabilité, & demeure conſtant, quoi qu'il ne doive ſa ſtabilité qu'à un tranſport ſucceſſif de graviers & de ſable, qui viennent de la partie haute du lit ſupérieur, & qui, roulés & chariés ſans interruption par le courant, emportés auſſitôt qu'arrivés, préſervent le vrai fond du lit, & le garantiſſent de l'action de l'eau, tant que dure ce

Digitized by Google

transport. Nous avons vu (72) avec quelle lenteur l'eau charie les matières qui cèdent à une certaine intensité de vitesse, laquelle n'est pas assez grande pour les enlever avec violence & les disperser, mais qui suffit pour les faire rouler avec ordre. C'est au physicien à observer quel est à cet égard le caractère & la manière de chaque rivière en particulier; mais il reste constant que dans chaque espèce de sol il y a une vitesse proportionnée à ce sol, qui est trop petite pour le creuser & pour approfondir le lit, ou trop grande pour permettre qu'il s'exhausse & se remplisse : or, si on suppose dans un lit donné cette vitesse connue, & qu'on sache aussi la quantité d'eau que doit dépenser ce lit, on peut desirer de savoir quelle est la plus petite pente, absolument requise, qu'il faut qu'ait ce lit, & les dimensions de sa section pour avoir de la stabilité. C'est ce que nous allons déterminer par le problême suivant.

PROBLÈME.

110. La quantité d'eau que doit dépenser une rivière étant connue, ainsi que sa vitesse de régime, déterminer la plus petite pente que son lit puisse avoir, & les dimensions de ce lit.

SOLUTION.

Puisque la pente doit être la plus petite possible,

Digitized by Google

il faut que le lit soit d'une figure dans laquelle le rayon moyen soit le plus grand possible : or, nous avons vu (60) que le lit trapèze dans lequel la largeur au fond est les $\frac{2}{3}$ de la hauteur de l'eau, & dont les taluds ont pour base les $\frac{4}{3}$ de cette profondeur, est de tous les lits de cette espèce, & possibles dans la pratique, celui qui donne le plus grand rayon moyen, & qui exige le moins de pente pour une vitesse donnée. Nous avons vu de plus que l'aire & le périmètre de ce lit sont les mêmes que ceux d'un lit rectangulaire, dans lequel la largeur est le double de la profondeur; ainsi dans un pareil lit la section est égale à deux fois le quarré de la profondeur, & (61) le rayon moyen est égal à la moitié de cette même profondeur: ainsi nommant D la dépense donnée, V la vitesse de régime connue, l la largeur & h la profondeur, on aura l'équation $\frac{D}{V} = 2h^2$, ou $\sqrt{\frac{D}{2V}} = h$, & $\sqrt{\frac{2D}{V}} = l$. Voilà ce qui regarde la section.

Quant à la pente exprimée par $\frac{1}{b}$, la formule (50) donne $\sqrt{b} - \text{L.}\sqrt{b+1,6} = \frac{297(\sqrt{r}-0,1)}{V+0,3(\sqrt{r}-0,1)}$ on substituera au lieu de $\sqrt{r}-0,1$ sa valeur $\sqrt{\frac{h}{2}}-0,1$, & tout étant connu dans le second membre, on en tirera facilement la valeur de b (62).

111. Si par le moyen du problême précédent, & en connoissant aussi la dépense de chacune des rivières qui se jettent dans un fleuve, depuis sa

Digitized by Google

ſource juſqu'à la mer, on calcule la pente qu'il devroit avoir ſur chaque partie de ſon cours, compriſe entre deux accrues, c'eſt-à-dire d'abord la pente depuis la mer juſqu'à la première rivière qu'il reçoit dans ſon lit, puis la pente depuis cette première rivière juſqu'à la ſeconde, & ainſi de ſuite juſqu'à la ſource, la ſomme de toutes ces pentes différentes donnera la plus petite hauteur dont la ſource de ce fleuve pourroit être élevée au-deſſus du niveau de la mer.

Mais ſi la hauteur effective de la ſource de ce fleuve eſt double, triple, quadruple, &c. de celle qu'on aura trouvée, il faudra en conclure que la pente du fleuve, d'une accrue à l'autre, ſera auſſi à-peu-près double, triple, quadruple, &c. de celle qu'on avoit d'abord trouvée, en ſuppoſant que le lit étoit celui qui répond à la plus petite pente. Ainſi on pourra propoſer le nouveau problême que voici.

PROBLÊME.

112. La dépenſe d'un fleuve étant connue, en un lieu quelconque de ſon cours, ſa pente & la viteſſe de régime; déterminer les dimenſions de ſon lit.

SOLUTION.

Soit nommée D la dépenſe connue, b le dénominateur de la pente $\frac{1}{b}$, V la viteſſe moyenne rela-

Digitized by Google

tive au régime, x la largeur du lit, & y sa profondeur; la section nommée S doit être égale à la dépense divisée par la vitesse; ainsi on aura d'abord $\frac{D}{V} = S = xy$. Le dénominateur b étant connu, on peut faire $\sqrt{b} - L. \sqrt{b + 1,6} = \sqrt{B}$; & la formule de la vitesse moyenne (50) deviendra $V = \frac{297(\sqrt{r} - 0,1)}{\sqrt{B}} - 0,3(\sqrt{r} - 0,1)$, qu'on peut exprimer ainsi : $V = (\sqrt{r} - 0,1)\left(\frac{297}{\sqrt{B}} - 0,3\right)$, d'où l'on tire $\frac{V}{\frac{297}{\sqrt{B}} - 0,3} = \sqrt{r} - 0,1$; & enfin $\frac{V}{\frac{297}{\sqrt{B}} - 0,3} + 0,1 = \sqrt{r}$. On aura donc la valeur de r: mais cette valeur, en supposant le lit rectangulaire, est égale à $\frac{xy}{x + 2y}$; on a donc les deux équations $S = xy$, & $r = \frac{xy}{x + 2y}$; d'où l'on tire $x = \sqrt{\left(\frac{S}{2r}\right)^2 - 2S} + \frac{S}{2r}$; la largeur étant connue, on en déduira la profondeur, & on aura les dimensions du lit rectangulaire.

Nous avons déja observé (62) que le problême a deux solutions, dont une donne la profondeur plus grande que la largeur, & l'autre donne le lit plus large que profond : c'est celle-ci qui convient dans la pratique.

Si on veut que le lit ait la figure d'un trapèze, dont les taluds (60) aient pour base les $\frac{4}{3}$ de la hauteur, on ajoutera à la largeur qu'on vient de trouver les $\frac{4}{3}$ de la profondeur, ce qui donnera la largeur de la section à la surface de l'eau, & on soustraira de cette même largeur les $\frac{4}{3}$ de la profon-

Digitized by Google

deur, pour avoir la largeur au fond du lit. Cette nouvelle forme, en se rapprochant de la figure naturelle des lits ordinaires, ne change rien aux données du problême, parce que le lit trapèze a, comme nous l'avons dit, même rayon moyen que le lit rectangulaire qui lui répond, & dont la largeur est la moyenne de celle du premier.

Application des deux problêmes précédens à la pente de la Seine & à sa section.

113. Pour donner un exemple de l'application qu'on peut faire des deux problêmes précédens au cours d'une rivière, nous choisirons la Seine considérée cans toute l'étendue de son cours, depuis sa source jusqu'à son embouchure à Quillebeuf, & nous supposerons qu'il tombe du ciel, année moyenne, 18 pouces de hauteur d'eau sur toute l'étendue du terrain qui fournit les eaux à cette rivière, mais que le quart seulement de cette quantité est employé à fournir à sa dépense moyenne; les $\frac{1}{4}$ restans s'écoulent en partie par les accrues extraordinaires, & fournissent à l'évaporation ainsi qu'à la nutrition des plantes.

Pour ôter toute équivoque sur la mesure de la lieue, nous emploierons celle du mille, qui d'ailleurs se prête mieux au calcul; ainsi un mille quarré fait un million de toises quarrées, ou 36 millions de pieds quarrés, qui, multipliés par le quart de 18 pouces, ou 4 $\frac{1}{2}$ pouces, font treize millions

Digitized by Google

cinq cents mille pieds cubes d'eau à écouler en 365,24 jours, ou en 31556736 secondes, ce qui revient à 0pi.,4278 par seconde.

Nous trouvons que la totalité du terrain qui fournit les eaux que la Seine dépense à son embouchure est de 20465 mille quarrés. La plus grande longueur de ce terrain est depuis Quillebeuf jusqu'à trois lieues au dessus de Langres, où sont les sources de la Marne : cette ligne a 215 milles de longueur; elle passe à portée de Troyes, Nogent, Paris, Meulan, & Pont-de-l'arche; elle partage le terrain en deux parties inégales, savoir 11136 milles à droite, & 9329 à gauche.

Mais pour fixer à peu de chose près, quelle est, d'après notre supposition, la dépense de la Seine en un lieu quelconque de l'étendue de son cours, il faut examiner plus en détail les rivières qui se jettent dans son lit, & la quantité d'eau qu'elles y amènent.

		Dépense moyenne du lit par seconde en pieds cubes.
	mil. quar.	
114. Le terrain qui fournit la source de la Seine, sur 6,4 milles de longueur jusqu'au point où elle commence d'être flottable, contient en superficie ci.	34	pi. 95,613
De-là jusqu'au confluent de l'Ourse, sur 32 milles de longueur directe, il y a. . .	379	
	413	

dont les eaux se jettent directement dans le lit de la Seine par plusieurs ruisseaux répandus sur sa longueur ; ainsi la dépense moyenne de cette partie du lit n'est due qu'à 34 milles, qui produisent la source, plus la moitié de 379 milles. Total 223 ½ milles, lesquels, à 0pi.,4278 cubes par mille, font la dépense moyenne 95,613 portée à l'accolade.

Les eaux de la rivière d'Ourse sont produites sur.... Depuis son confluent jusqu'à celui de l'Aube, sur 39 milles de longueur directe, il y a...

mil. quar.		
413	Dépense moyenne du lit par seconde en pieds cubes.	
199		pi. 373,683
523		
1135		

dont les eaux se rendent dans le lit de la Seine, & dont la moitié seulement doit entrer dans l'évaluation de la dépense moyenne du lit, ce que nous répétons ici une fois pour toutes.

Les eaux de la rivière de

Digitized by Google

	mil. quar.	Dépense moyenne du lit par seconde en pieds cubes.
l'Aube sont produites sur. . . .	1135	
	1169	
Depuis son confluent jusqu'à celui de l'Yonne, sur 27,5 milles de longueur, il y a. . . .	376	1066pi.,077
Les eaux de la rivière d'Yonne, de l'Armançon, &c.	2680	
sont produites sur. . . .	3126	
Depuis son confluent jusqu'à celui de la Marne, sur 33 milles de longueur, il y a. . . .	2892	3102,405
Les eaux de la Marne, &c.	8698	
sont produites sur. . . .	3687	
Depuis son confluent jusqu'à celui de l'Oise, sur 16,6 milles de longueur, il y a. . . .	327	5368,247
Les eaux de l'Oise, de l'Aisne, &c.	12712	
sont produites sur. . .	4601	
Depuis son confluent jusqu'à celui de l'Yton, sur 37,5 milles de longueur, il y a. . . .	749	7566,712
Les eaux de l'Yton, de l'Eure, &c.	18062	
sont produites sur.	1559	
Depuis son confluent jusqu'à Quillebeuf, sur 28 milles de longueur, il y a. . . .	844	8574,395
	20465	

115.

Digitized by Google

115. Si on ſuppoſe que la viteſſe moyenne de régime de la Seine ſoit de 25 pouces par ſeconde, qui répondent à une viteſſe de 30 pouces à la ſurface, on pourra calculer l'une après l'autre par le problême (110), quelles ſeroient les pentes de la Seine d'une accrue à l'autre, dans un lit direct de la figure qui répond à la moindre pente; en additionnant les différences de niveau produites par ces pentes depuis l'embouchure de cette rivière juſqu'à la ſource, on trouvera que la ſource ne ſeroit élevée que d'environ 153 pieds au deſſus du niveau de la mer.

Mais ſi le lit, au lieu d'être direct d'une accrue à l'autre, comme on l'avoit d'abord ſuppoſé, faiſoit des ſinuoſités qui doublaſſent ſon cours entier, comme cela a lieu, à peu de choſe près, de Paris à Rouen, la hauteur de la ſource, dans le lit de la plus petite pente, deviendroit de 306 pieds; & il s'en faudroit encore de beaucoup que cette hauteur approchât de la véritable, parce que la figure du lit de la Seine eſt bien différente de celle du lit qui conviendroit à la plus petite pente, & qu'elle ſe prête à une pente beaucoup plus grande.

La quantité de milles quarrés dont la Seine reçoit les eaux, avant de recevoir celles de la Marne, eſt, ſuivant l'état ci-deſſus, de 8698, & la Marne reçoit celle de 3687: la Seine, au deſſus de Paris, avant de recevoir la rivière des Gobelins, écoule donc les eaux d'environ 12400 milles quarrés, au lieu de 15870, qui répondent à l'évaluation de

Digitized by Google

M. Mariotte; ainsi, dans notre supposition, il doit passer dans le lit de la Seine, entre Charenton & Paris, 5304,72 pieds cubes par seconde; cette dépense divisée par la vitesse 2 pi. 1 po. donne une section égale à 2546,26 pieds quarrés : la profondeur du lit de la plus petite pente seroit donc $\sqrt{\frac{D}{2V}}$ $= 35^{pi.},65$, & sa largeur seroit de $71^{pi.},30$; $\sqrt{r} - 0,1$, exprimée en pouces, deviendroit 14,525, & on trouveroit $b = 23094$; c'est-à-dire que la moindre pente possible qui réponde dans ce lit à 25 pouces de vitesse moyenne est $\frac{1}{23094}$.

Mais on sait, par les nivellemens de M. Picart, que la pente réelle de la Seine, au dessus de Paris, est égale à $\frac{1}{6000}$; ainsi la pente du lit réel est à la pente du lit supposé comme 23094 est à 6000, ou :: 3,84 : 1. Si donc on suppose que le même rapport ait lieu pour toutes les parties du cours de la Seine, on conclura la vraie hauteur de la source de la Seine à environ 1175 pieds, sans compter l'angmentation de pente due aux coudes sur toute la longueur du cours, dont nous parlerons tout-à-l'heure. Par une suite du même calcul on trouveroit que la hauteur de Paris à Quillebeuf est d'environ 150 pieds.

116. Enfin, puisque nous supposons connues la dépense de la Seine au dessus de Paris, sa pente, & sa vitesse moyenne, dans son état ordinaire, nous sommes en état de calculer, par le problême précédent (112), les dimensions de son lit moyen entre Charenton & Paris.

Digitized by Google

L'équation $\frac{V}{\frac{297-0,3}{\sqrt{B}}} + 0,1 = \sqrt{r}$ donne 6,7454 pour la racine quarrée du rayon moyen, ou $45^{po.},5$ pour le rayon moyen, & la valeur de $x = \sqrt{(\frac{S}{2r})^2 - 2S} + \frac{S}{2r}$ devient en nombres $\sqrt{(4029,246)^2 - 733322,88} + 4029,246 = 7966^{po.},43$: cette largeur du lit étant connue, on en déduit la profondeur, qu'on trouve égale à $46^{po.},026$, ou à $3^{pi.},835$: ainsi les dimensions du lit, d'après toutes les données employées dans ce calcul, seroient de 663,87 pieds de largeur, sur 3,835 pieds de profondeur réduite, ce qui ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité.

117. La Seine, avant de recevoir la Marne, ne dépense que l'eau qui lui est fournie par 8696 milles quarrés, ou 3721 pieds cubes par seconde : si on suppose, comme il le paroît par les nivellemens de M. Picart, que sa pente n'est encore que $\frac{1}{6000}$, & que la vitesse de régime soit aussi de 25 pouces par seconde, on trouvera que les dimensions de son lit doivent se réduire à 463 pieds 4 pouces de largeur, sur 3 pieds 10 pouces 3 lignes de profondeur : ainsi la jonction des eaux de la Marne à celles de la Seine occasionne au lit de la Seine une augmentation de largeur de 200 pieds, tandis que la profondeur du courant baisse d'environ 3 lignes, la vitesse de régime restant constante. On pourroit conjecturer de-là que la pente de la Marne est plus grande que celle de la Seine avant

Digitized by Google

leur confluent; & on peut, à cette occasion, proposer le problême général des accrues permanentes, que voici.

PROBLÊME.

118. Connoissant la largeur, la profondeur & la vitesse de régime d'une rivière, dont le lit, creusé dans un sol homogène, reçoit ensuite une ou plusieurs accrues, dont on connoît la dépense totale; déterminer les dimensions & la pente du nouveau lit, qui écoule toutes les accrues.

SOLUTION.

Nous cherchons à déterminer en géneral la variation qu'éprouve le lit d'une rivière, lorsqu'après avoir coulé dans un lit où sa dépense & les dimensions du lit, & la vitesse moyenne par conséquent, sont dans un rapport convenable & exact avec la nature du sol, il survient une accrue, c'est-à dire une augmentation de dépense quelconque, qui oblige ce lit à s'élargir, à s'approfondir, & à changer de pente, pour conserver la même vitesse moyenne qui convient au régime. On sent bien qu'au confluent même l'ordre des vitesses des filets d'eau vers les deux rives qui se terminent au bec du confluent, doit être absolument interverti, puisque ces vitesses, qui étoient les moindres dans chaque lit séparé, doivent devenir les plus grandes, & répondre à la vitesse du filet du milieu dans

Digitized by Google

le lit commun ; mais cette augmentation ne peut pas se faire tout-à-coup : les deux filets d'eau de chaque courant restent quelque tems séparés par une bande d'eaux mortes, c'est-à dire dont la vitesse ne s'accélère que par degrés, qui donne lieu à un dépôt sur le prolongement du bec du confluent ; ce dépôt, qui représente assez bien l'arête saillante d'un glacis, augmente la paroi, diminue un peu la section, & corrige l'effet de la trop grande largeur du lit au point de réunion. Quand les eaux sont bien mêlées, quand l'ordre des vitesses de tous les filets est bien établi sur toute l'étendue du lit commun, c'est alors qu'on peut en déterminer l'étendue : sa largeur est ordinairement moindre que la somme des largeurs des lits séparés, mais plus grande que l'une d'elles ; sa profondeur est plus grande qu'elle n'étoit dans chacun, & la pente est communément moindre.

Soient D la somme des dépenses réunies dans le lit commun, l & h la largeur & la hauteur du lit de la rivière principale, avant l'accrue, V la vitesse de régime commune aux différens lits ; on aura $\frac{D}{V}$ pour l'expression de l'aire de la section du grand lit. Nous nommerons S cette aire de la section. Si la pente de la rivière, au dessous du confluent, restoit la même qu'auparavant, il faudroit, pour conserver la même vitesse, que le rayon moyen restât le même, malgré l'augmentation du lit ; mais cet effet ne peut avoir lieu dans la nature : car

Digitized by Google

si la hauteur seule augmentoit d'une quantité quelconque y, la valeur du rayon moyen $\frac{l(h+y)}{l+2(h+y)}$ seroit toujours plus grande que celle du rayon moyen $\frac{lh}{l+2h}$ du premier lit, à moins que la largeur ne diminuât. De même, si la largeur seule augmentoit de la quantité x, le rayon moyen $\frac{(l+x)h}{l+x+2h}$ ne pourroit rester constant qu'en diminuant la hauteur : or, l'expérience montre constamment qu'après un confluent, aucune des deux dimensions ne diminue quand l'eau agit librement sur elles, & qu'au contraire elles augmentent l'une & l'autre; mais puisqu'il est prouvé que l'augmentation d'une seule dimension fait augmenter le rayon moyen, quoique l'autre reste constante, à plus forte raison doit-il augmenter, quand le lit s'accroît dans les deux sens.

Si l'augmentation du rayon moyen est inévitable, quand la section augmente, la diminution de la pente devient nécessaire pour conserver l'égalité de la vitesse de régime, & cette diminution dépend absolument du changement que la figure du lit éprouve; ici, il semble d'abord que nous n'avons aucune donnée, au moyen de laquelle le problême soit déterminé : cependant on peut remarquer, 1°. que dans les lits ordinaires, creusés par la nature, la largeur excède toujours de beaucoup la hauteur; 2°. que, pour augmenter le rayon moyen de la même quantité par l'une ou l'autre de ses dimen-

Digitized by Google

ſions, il faut étendre la largeur beaucoup plus que la hauteur, comme on peut s'en convaincre en comparant les quantités $\frac{(l+x)h}{l+x+2h}$ & $\frac{l(h+y)}{l+2(h+y)}$; & comme on voit, après une accrue, la largeur du lit beaucoup plus augmentée à proportion que ſa profondeur, il paroît qu'on doit conclure que la force de l'eau agit ſur le lit de manière à augmenter le rayon moyen également par chacune des deux dimenſions. D'après cette hypothèſe, qui paroît plus que probable, on peut former l'équation $\frac{(l+x)h}{l+x+2h} = \frac{l(h+y)}{l+2(h+y)}$; mais on a toujours la Section $S = (l+x)(h+y)$, d'où l'on tire $l+x = \frac{S}{h+y}$: ſubſtituant dans l'équation précédente cette valeur de $l+x$, on a $\frac{Sh}{S+2h(h+y)} = \frac{l(h+y)}{l+2(h+y)}$, qui eſt une équation du ſecond degré, de laquelle on déduit $h+y = \frac{\sqrt{8Sl^2h^2+S^2(l-2h)^2}-S(l-2h)}{4hl}$.

Ainſi connoiſſant la largeur & la profondeur du premier lit, avant l'accrue, & la ſection du nouveau lit, donnée par le quotient de la nouvelle dépenſe, diviſée par la viteſſe conſtante, on cherchera d'abord la nouvelle profondeur, exprimée par $h+y$, & d'après celle-ci, la nouvelle largeur: ces deux dimenſions étant connues, on trouvera le rayon moyen du nouveau lit, & la formule ordinaire du mouvement uniforme donnera enſuite la nouvelle pente diminuée du lit.

119. Pour donner une application de ce calcul,

Digitized by Google

nous ſuppoſerons une rivière de 40 pieds de largeur ſur 5 de profondeur, qui a une viteſſe de régime de 20 pouces par ſeconde, ce qui lui ſuppoſe une pente de $\frac{1}{9128,85}$, ou d'un peu moins de 9 lignes $\frac{1}{2}$ par 100 toiſes. Si cette rivière ſe trouve ſucceſſivement accrue, au point de doubler la dépenſe, ou qu'elle reçoive une autre rivière de pareilles dimenſions & de même viteſſe, on demande comment le lit & la pente doivent ſe régler, pour fournir à une dépenſe de 400 pieds de ſection, avec une viteſſe égale de 20 pouces.

On a donc $S = 400$.pi.; $l = 40$ pi.; $h = 5$ pi.: avec ces données l'équation précédente donne $h + y = 5^{pi.},6155$, & $l + x = 71^{pi.},231$: le rayon moyen qui en réſulte ſera $4^{pi.},8507$, ou $58^{po.},2084$, & $\sqrt{r} - 0,1 = 7,5294$. Avant l'accrue le rayon moyen étoit $4^{pi.} = 48^{po.}$, & $\sqrt{r} - 0,1$ n'étoit égal qu'à 6,8282. Cette différence indique la diminution que doit eſſuyer la pente pour conſerver la même viteſſe de 20 pouces; & ſi on calcule cette pente d'après $V = 20$ pouces, & $\sqrt{r} - 0,1 = 7,5294$, on trouve $\sqrt{b} - L.\sqrt{b} = 100,4607$, & $\frac{1}{b} = \frac{1}{11048}$, qui équivaut à-peu-près à 7 li. $\frac{5}{6}$ par 100 toiſes; ainſi la pente ſe trouve diminuée d'un peu moins de 1 li. $\frac{2}{3}$ par 100 toiſes.

120. La viteſſe de régime n'eſt donc pas la ſeule donnée qui caractériſe une rivière, & qui règle ſon lit; il y a un certain rapport entre ſa largeur & ſa profondeur moyennes, qui réſulte de la nature du

Digitized by Google

ſol qui fait le lit, quand il dépenſe plus ou moins d'eau ; ainſi, par exemple, la Seine affecte un plus grand rapport de ſa largeur à ſa profondeur, que les rivières qui coulent dans un terrain plus doux & plus argileux. Bornons-nous ſur ceci à deux exemples, qu'on pourra appliquer à toutes les autres rivières.

1°. En ſuppoſant que la Seine, un peu au deſſus de Paris, ait en effet pour dimenſions moyennes 664 pieds de largeur (116), & $3^{pi.},835$ de profondeur, on peut demander quelles ſeroient les dimenſions de ſon lit vers ſa ſource, en terrain homogène, en ſuppoſant ſa ſection égale à un pied quarré, & la même viteſſe de régime qu'auprès de Paris. La formule du problême (118) donne dans ce cas $l = 1,^{pi.}5489$, & $h = 0,6456$: la largeur de ce lit eſt plus que double de la profondeur, & ſi l'on ſuppoſoit la ſection encore plus petite, le rapport de ces dimenſions ſe rapprocheroit toujours de celui de 2 à 1, ſans cependant l'égaler jamais que dans un lit infiniment petit. Quoi qu'il en ſoit, en bornant le lit de la Seine, vers ſa ſource, à la ſection d'un pied quarré, les dimenſions du lit, telles que nous venons de les déterminer, étant ſubſtituées dans l'équation du problême (118), avec une ſection quelconque de la Seine, donneroient les dimenſions du lit qui répondroient à chaque ſection, & par conſéquent à la dépenſe de cette rivière, dans chaque cas : on pourroit donc nommer ce lit, d'un pied quarré de ſection, *lit de*

Digitized by Google

régime de la Seine; & il ſerviroit à déterminer les dimenſions du lit de cette rivière pour chaque accrue permanente, en ſuppoſant toujours homogène le ſol dans lequel eſt creuſé le lit, & la viteſſe de régime conſtante.

2°. On trouve que le lit moyen de l'Eſcaut, entre Condé & Valenciennes, creuſé dans un argile propre à faire des briques, a 156 pieds quarrés de ſection, ſur 37 pieds de paroi développée; ſon rayon moyen eſt donc égal à $4^{pi.},216$. Si on cherche (62) quel ſeroit le lit rectangulaire, ou le lit trapèze avec des taluds de la $\frac{4}{3}$ de hauteur, dans lequel on auroit même ſection & même paroi, on trouvera que ce lit auroit 24 pieds de largeur réelle ou moyenne, & $6^{pi.},5$ de profondeur; & ſi, au moyen de ces dimenſions, on cherche (118) celles *du lit de régime*, d'un pied quarré de ſection, on trouvera qu'il auroit $1^{pi.},4499$ de largeur, ſur 0,6897 de hauteur. Ces deux dimenſions ſont entre elles dans le rapport de 2,102 à 1, tandis que celles du lit de régime de la Seine ſont dans le rapport de 2,399 à 1 : cette différence paroît produite par celle du ſol dont ſont formés ces deux différens lits; car s'il pouvoit exiſter une nature de terrain, dans lequel la largeur du lit de régime ne fût exactement que double de la profondeur, la figure de ce lit ſeroit conſtante pour des ſections & des dépenſes quelconques, comme il eſt aiſé de s'en convaincre, en conſidérant le ſecond membre de l'équation $h+y=\frac{\sqrt{8Sl^2h^2+S^2(l-2h)^2}-S(l-2h)}{4hl}$,

dans lequel les quantités $S^2(l-2h)^2$ & $S(l-2h$ se réduisent à zéro, lorsque $l=2h$, ce qui donne constamment $h \pm y = \sqrt{\frac{S}{2}} = \sqrt{\frac{D}{2V}}$, ainsi qu'on l'a vu (110).

Mais en voilà assez sur cet objet, pour engager les Hydrauliciens à étudier le cours des différentes rivières qu'ils seront à portée d'examiner, dans la vue de fixer les différens lits de régime qui conviennent aux différentes espèces de terrains, en ne séparant point cependant cette observation de celle de la vitesse de régime, dans les parties où le lit paroîtra avoir de la stabilité. Disons à présent un mot de l'augmentation de pente que produisent les coudes, sur toute la longueur du cours d'une rivière.

121. Quand le cours d'une rivière n'est pas direct d'une accrue à l'autre, le lit se replie sur lui-même par plusieurs sinuosités, qui augmentent son développement; & il s'y forme une certaine quantité de bricoles, dont le nombre est d'autant plus grand que le rapport du cours développé au cours direct est plus grand. Ainsi, en nommant N le nombre des bricoles, C le cours développé d'une accrue à l'autre, & c le cours direct correspondant, N sera proportionnel à $\frac{C}{c}$.

D'un autre côté, plus le lit est étroit, plus il s'y forme de coudes & de bricoles dans une partie égale de la longueur du cours direct; car nous avons vu que les rayons des arrondissemens des

Digitized by Google

ſinuoſités ſont proportionnels à la largeur de la rivière, toutes choſes égales d'ailleurs. Ainſi nommant L la largeur du lit vers l'embouchure de la rivière, & l la largeur du lit moyen entre deux accrues, le nombre des bricoles N ſera auſſi proportionnel à $\frac{L}{l}$.

Enfin, ſi près de l'embouchure il ſe forme communément une bricole ſur une partie du cours direct, exprimé par un nombre de toiſes n, il ſe formera d'autant plus de bricoles d'une accrue à l'autre que le lit direct aura pour longueur un plus grand nombre de fois n; ainſi le nombre de bricoles N ſera encore proportionnel à $\frac{C}{n}$.

Il ſuit de-là que le nombre de bricoles qui ſe forment d'une accrue à l'autre, ou $N = \frac{CLc}{cln} = \frac{CL}{ln}$. D'après ces principes, ſi on reprend le cours de la Seine, pour ſe faire une idée générale de la pente qui eſt due à ſes ſinuoſités, on pourra calculer d'abord les différentes largeurs de ſon lit moyen entre deux accrues, par le moyen du problême (118), & en employant, pour la commodité du calcul, le *lit de régime de la Seine*, dont nous avons parlé (120). Ces largeurs doivent enſuite être augmentées des $\frac{4}{3}$ de la profondeur, pour réduire les lits rectangulaires à des lits trapèzes : on pourrra ſuppoſer que vers la mer, il ſe forme dans le lit de la Seine une ſeule bricole, ſur mille toiſes de cours direct, en faiſant $n = 1000$ toiſes, & que le cours développé eſt double du direct. D'après ces différentes hypothèſes, qu'on peut varier tant qu'on voudra, on dreſſera le tableau ſuivant, dans lequel

Digitized by Google

la première colonne marque le nombre de milles qu'a le cours direct depuis un confluent jusqu'à l'autre; on suppose ce nombre doublé, pour avoir C ou le cours développé : la seconde exprime la section moyenne du lit, qui répond à la dépense moyenne du paragraphe (114), divisée par 2 pieds 1 pouce de vitesse; la troisième colonne comprend les profondeurs moyennes des lits calculées; la quatrième exprime les largeurs moyennes des mêmes lits supposés rectangulaires; la cinquième montre les largeurs des mêmes lits, réduits au trapèze, avec des taluds dont la base est égale aux $\frac{4}{3}$ de la profondeur; enfin la sixième colonne montre le nombre de bricoles qui doivent se former sur chaque longueur de cours développé d'une accrue à l'autre.

Nota. On suppose la vitesse de régime constante, & égale à 25 pouces, sur toute la longueur du cours.	LONGUEUR du cours direct, exprimé en milles.	SECTION moyenne du lit, exprimée en pieds quarrés.	PROFONDEURS moyennes du lit calculées, exprimées en pieds.	LARGEURS du lit supposé rectangulaire, exprimées en pieds.	LARGEURS du lit réduit à la figure d'un trapèze, exprimées en pieds.	NOMBRE des bricoles sur chaque partie du cours.
	mil.	pi. qu.	pi.	pi.	pi.	bric.
Depuis la source de la Seine jusqu'au confluent de l'Ourse.	38,4	45,894	2,67	17,1	20,66	4008
Depuis le confluent de l'Ourse jusqu'à celui de l'Aube.	39,0	179,36	3,38	53,2	57,71	1458
Depuis le confluent de l'Aube jusqu'à celui de l'Yonne.	27,5	511,7	3,75	136,4	141,4	419
Depuis le confluent de l'Yonne jusqu'à celui de la Marne.	33,0	1489,0	3,80	391,8	396,8	179
Depuis le confluent de la Marne jusqu'à celui de l'Oise.	16,6	2576,64	3,835	671,8	676,9	53
Depuis le confluent de l'Oise jusqu'à celui de l'Yton.	37,5	3632,0	3,836	946,8	951,9	84
Depuis le confluent de l'Yton jusqu'à Quillebeuf.	28,0	4115,5	3,837	1072,5	1077,6	56
			Total du nombre des bricoles			6257

Digitized by Google

Si on ſuppoſe chaque bricole moyenne de 30 degrés d'angle d'incidence, comme cela ſeroit dans des arrondiſſemens en demi-cercle, de trois bricoles chacun, conſtamment répétés, avec quelques parties droites qui achèveroient de doubler la longueur du cours direct, la réſiſtance d'une de ces bricoles ſera (105) égale à $\frac{V^2 S^2}{3000} = \frac{25^2 \times 0,5^2}{3000} =$ $0^{po.},05208$, qui étant multipliés par 6257, nombre des bricoles, donne $326^{po.},26456$, ou $27^{pi.},188$ pour l'augmentation de pente due à la réſiſtance des coudes, depuis la ſource juſqu'à l'embouchure de la Seine. Au reſte, ce calcul n'eſt qu'une évaluation fort en gros, qui peut être ſuſceptible d'augmentation vers la ſource, où le nombre des bricoles excédera de beaucoup celui de 4008, que nous avons trouvé pour un lit moyen, ou de diminution, ſi la rivière affectoit de faire de grandes ſinuoſités arrondies, ſur des rayons beaucoup plus grands que 7 fois ſa largeur.

122. La propriété qu'a une rivière de former des îles eſt une marque de la grandeur de ſa pente, & vient principalement du manque d'exactitude dans le tracé des ſinuoſités. Si les rayons des arcs de ſes coudes ſont trop grands ou trop petits, de ſorte que le fil de l'eau ne ſoit pas régulièrement réfléchi de bricole en bricole, dans les parties droites du lit, ce lit aura de la diſpoſition à faire des fouilles & des dépôts, qui donneront lieu à la formation des iſles; le courant, partagé en deux

Digitized by Google

bras, aura besoin d'une plus grande pente, & les rayons des arrondissemens se trouveront à-peu-près proportionnés aux nouvelles largeurs des lits séparés. Il est probable que dans l'antiquité les lits de la plupart des fleuves étoient plus élevés qu'aujourd'hui, mais que le rapport de leur largeur à leur profondeur étoit moindre, en sorte que les rayons de leurs arrondissemens ayant été alors multiples d'une moindre largeur, se trouvent aujourd'hui hors de la proportion convenable, sans néanmoins que le courant puisse se déplacer pour rétablir ce rapport, parce que le fond ou les berges ont acquis trop de consistance ; ainsi le seul moyen que la nature puisse employer pour substituer un autre ordre au premier, est de rétrécir le lit en le partageant, de sorte que s'il faisoit auparavant trois bricoles irrégulières, il en puisse faire quatre régulières, ou s'il en faisoit quatre, il en puisse faire cinq, &c.

Il est clair que l'établissement du lit d'une rivière qui forme deux bras, pour embrasser une île, rentre dans le cas de deux lits différens qui se réunissent à un confluent ; il y a un rapport déterminé, dans le cas où il y a stabilité, entre la largeur, la profondeur & la pente du lit commun, & celles des lits séparés, pourvu néanmoins que l'île ait assez de longueur pour que le régime du courant y soit exact, c'est-à-dire que l'ordre des vitesses des différens filets soit bien établi. Nous n'entrerons point à ce sujet dans un plus grand détail, qui ne

Digitized by Google

pourroit répondre qu'à un très-petit nombre de cas. Venons enfin au problême des accrues périodiques, qui apprend à déterminer de combien l'eau s'élève dans un lit donné, pour dépenser une plus grande quantité d'eau, produite par les pluies accidentelles ou par la fonte des neiges.

PROBLÊME.

123. Connoissant la pente, la profondeur, la largeur de la base d'un lit rectangulaire ou trapèze, & par conséquent la dépense d'une rivière, déterminer de combien sa section doit s'élever, si la dépense vient à augmenter d'une quantité connue.

SOLUTION.

Soient D la dépense connue, & h la hauteur totale pendant l'accrue, pour le lit rectangulaire, $\frac{1}{b}$, la pente constante, l la largeur, nous avons vu (112) que l'on a dans un courant uniforme quelconque $\sqrt{r} = \frac{V}{\frac{297}{\sqrt{B}} - 0,3} + 0,1$; élevant au quarré, mettant pour r & V leurs valeurs $\frac{lh}{l+2h}$ & $\frac{D}{lh}$, & faisant, pour abréger $\frac{297}{\sqrt{B}} - 0,3 = K$, l'équation deviendra $\frac{lh}{l+2h} = \left(\frac{D}{lhK} + 0,1\right)^2$; élevant le second membre au quarré, & réduisant, on a une équation qui peut se résoudre par les méthodes ordinaires du troisième

troisième degré, mais elle devient extrêmement compliquée, sur-tout si le lit est trop petit pour négliger la quantité 0,1 qui affecte les quatre derniers termes.

124. Pour éviter les calculs dont cette solution est hérissée, on peut se servir d'une méthode d'approximation suffisante & plus expéditive, fondée sur ce qu'un changement dans une des dimensions de la section influe bien davantage sur la valeur de la dépense & de la section que sur celle du rayon moyen; ayant donc estimé vaguement la dimension inconnue, qui est ici la hauteur, on s'en servira pour former le rayon moyen, & alors l'équation $\sqrt{r} = \frac{D}{lh\left(\frac{297}{\sqrt{B}} - 0,3\right)} + 0,1$ donnera une première valeur approchée de la hauteur, qui ordinairement n'excédera pas d'un dixième la véritable, quand même on l'auroit d'abord supposée trop foible d'un tiers. Cette valeur servira à rectifier la première, par une seconde opération, qui sera le plus souvent suffisante.

Pour donner un exemple de ce calcul, nous supposerons une rivière qui écoule 1500 pieds cubes d'eau par seconde, avec une vitesse de 20 pouces, dans un lit rectangulaire de 150 pieds de largeur sur 6 de hauteur, avec une pente de $\frac{1}{12660}$, ou environ 7 lignes par 100 toises : pour connoître l'élévation & la vitesse qui auroit lieu si la dépense étoit triplée par une accrue, on observera que si

la viteſſe reſtoit la même, la hauteur ſeroit triplée, & deviendroit égale à 18 pieds; mais puiſque la moindre augmentation de la profondeur du lit fait croître le rayon moyen, & par conſéquent auſſi la viteſſe, cette profondeur doit être moindre que le triple de 6 pieds. Suppoſons la donc d'abord de 12 pieds, & formons en le rayon moyen, qui ſera de $10^{pi.},34483 = 124^{po.},138$; alors l'équation $\sqrt{r} - 0,1 = \frac{D}{lh\left(\frac{297-0,3}{\sqrt{B}}\right)}$ ou $h = \frac{D}{l(\sqrt{r}-0,1)\left(\frac{297-0,3}{\sqrt{B}}\right)}$, & dans laquelle on a $\sqrt{B} = 107,8$; $D = 4500$ pi.; $\sqrt{r} - 0,1 = 11,0417$, donnera $h = 13,276$, tandis que nous l'avions eſtimée de 12 pieds. Il ſuit de-là que la valeur du rayon moyen, que nous avons d'abord calculée, a été trop foible, ce qui nous a fait trouver une valeur de h un peu trop forte. Cette vraie valeur de h doit toujours être entre celle qu'on a calculée & celle qu'on a eſtimée, mais beaucoup plus près de la première que de la ſeconde : en effet, ſi on ſuppoſe la hauteur égale à $12^{pi.},8773$, le rayon moyen devient $131^{po.},8836$, & on en déduit par la formule $h = 12^{pi.},8773$, c'eſt-à-dire la valeur exacte de la profondeur du lit, puiſqu'elle eſt egale à celle dont le rayon moyen eſt formé.

Mais une ſeconde eſtimation auſſi préciſe ne peut pas être faite au haſard; elle eſt fondée ſur une méthode d'approximation aſſez exacte, pour diſpenſer d'en vérifier le réſultat. Rien n'eſt plus aiſé que ces ſortes de méthodes : voici, une fois

Digitized by Google

pour toutes, en quoi consiste celle-ci, chacun pouvant d'ailleurs s'en faire une à sa manière.

125. Puisque la hauteur précise du courant, dont la dépense est triple, doit se rapprocher davantage de $13^{pi.},276$ que de 12 pieds, supposons cette dernière augmentée de $0^{pi.},9$, on aura par conséquent $\sqrt{r} - 0,1 = 11,3927$, & $h = 12^{pi.},867$, au lieu de $13^{pi.},276$: cette quantité diminue donc de $0^{pi.},409$, lorsque la première hauteur est augmentée de $0^{pi.},9$. Or, avec des quantités qui diffèrent déja si peu, on ne peut pas tomber dans une erreur sensible, en supposant que si 12 pieds augmentent de la quantité $x \times 0,9$, l'autre quantité $13^{pi.},276$ doit diminuer proportionnellement de la quantité $x \times 0,409$: ainsi pour que la valeur estimée de h coïncide à celle qui doit être calculée, il faut qu'on ait l'équation $12 + x \times 0,9 = 13,276 - x \times 0,409$, d'où l'on conclud $x = \frac{1,276}{1,309} = 0,9748$; ainsi la quantité qu'il faut ajouter à 12 pieds, au lieu d'être $0^{pi.},9$, est $0,9478 \times 0,^{pi.}9$, c'est-à-dire $0^{pi.},8773$, ce qui donne $h = 12^{pi.},8773$.

Si d'après cette hauteur & la formule du mouvement uniforme, on cherche quelle sera la vitesse moyenne pendant l'accrue, on la trouvera de $27^{po.},95$, au lieu de 20 pouces, qui est celle du lit ordinaire. On auroit encore le même résultat, en divisant simplement la dépense, 4500 pieds cubes, par la section $150^{pi.} \times 12^{pi.},8773 = 1931^{pi.},595$.

Digitized by Google

126. Si la ſection du lit, au lieu d'être rectangulaire, étoit un trapèze au talud des $\frac{4}{3}$, & qu'avant l'accrue il fût égal au lit rectangulaire, ſa hauteur étant toujours de 6 pieds, le fond auroit 142 pieds de largeur. Si on ſuppoſe que la dépenſe vienne auſſi à tripler, & qu'on emploie la méthode précédente, on trouvera que la hauteur pendant l'accrue devient égale à $12^{pi.},36$, la ſection 1959 pi., & la viteſſe moyenne $27^{po},57$. La hauteur & la viteſſe augmentent moins, dans ce dernier cas, parce que la ſection s'accroît davantage par le talud; & cet effet deviendroit encore plus ſenſible, ſi la rivière étoit moins large qu'on ne l'a ſuppoſée.

On pourroit ſe propoſer le problême inverſe du précédent, c'eſt-à-dire de déterminer de combien une rivière s'abaiſſe, lorſque ſa dépenſe diminue d'une quantité connue, pendant les ſéchereſſes.

CHAPITRE II.

Des redreſſemens des rivières, & des changemens que l'on peut faire à leur cours ou à leur lit.

127. Il y a pluſieurs cas où la nature ſemble avoir beſoin du ſecours de l'art, pout modérer le cours des rivières, qui paſſent quelquefois d'un état réglé, dans lequel elles font l'ornement, l'abondance & la richeſſe d'une province, à des crues

Digitized by Google

extraordinaires, & à des débordemens qui entraînent à leur ſuite la terreur, le déſordre, le ravage & la mort. On voit de tems en tems, & l'hiver dernier en eſt une époque mémorable, les fleuves, groſſis par des pluies ou des fontes de neiges trop ſubites, ſortir de leurs lits, & répandre avec leurs eaux dans les plaines & les vallées les fléaux d'un nouveau déluge. La perte des récoltes & des pâturages, la deſtruction des beſtiaux, la chute des maiſons & des édifices, la ruine des ponts & des chauſſées publiques, les horreurs de la famine ne ſont pas les ſeuls maux qui inondent alors l'humanité; les eaux laiſſent, en ſe retirant même, un germe de corruption & de mort dans de vaſtes prairies, où l'humidité croupiſſante produit des exhalaiſons puantes & mortelles, qui infectent l'air, & ceux que l'eau avoit épargnés périſſent ſouvent par l'influence empeſtée de ces vapeurs malignes.

Il faut convenir que quand ce ſont de grands fleuves qui cauſent ces calamités, il y a peu de remède; les travaux qu'il faudroit faire pour les prévenir ſont preſque au-deſſus des forces humaines: mais ſi le mal ne vient que de rivières médiocres, il paroît qu'on peut entreprendre de les contenir dans leur lit; & le moyen qui ſe préſente le plus naturellement eſt celui des redreſſemens.

La plupart des rivières forment des ſinuoſités conſidérables, qui alongent le développement de leur cours, & diminuent par conſéquent la pente réelle du lit. Si une rivière, pour parcourir 100000

Digitized by Google

toiſes de longueur directe, avec 100 pieds de chute d'une extrémité à l'autre, fait 200000 toiſes de cours développé, il eſt clair que ſa pente, qui ſeroit de $\frac{1}{6000}$ ſans ſinuoſités, ſe réduit réellement à $\frac{1}{12000}$, & la viteſſe ſe trouve diminuée non-ſeulement par la diminution de la pente, mais encore par la réſiſtance de tous les coudes, qui ne peut être vaincue que par une partie de la chute totale : or, ſi, lors des accrues extraordinaires, cette rivière ne peut contenir toutes ſes eaux dans ſon lit, & eſt ſujette aux débordemens, il eſt clair qu'elle ceſſeroit de l'être, ſi on coupoit quelques-unes de ſes ſinuoſités répandues ſur tout ſon cours, puiſque cette opération augmenteroit la pente, en diminuant la longueur développée du cours : il eſt vrai qu'on pourroit par là s'expoſer à quelques inconvéniens, ſi le redreſſement étoit trop conſidérable, & comme on contrarie en cela la nature, il faut bien de la circonſpection pour le faire impunément. Voyons d'abord en général quel eſt l'effet d'un redreſſement, par rapport à la hauteur de l'eau contenue dans le lit.

PROBLÊME.

128. La largeur, la profondeur & la pente d'une rivière étant données, quand elle coule à plein bord, dans le tems des grandes crues, dans un lit ſinueux, dont on connoît toutes les ſinuoſités; déterminer de combien ſes eaux baiſſeroient, ſi on

Digitized by Google

redressoit son cours d'une quantité connue, en coupant quelques-unes des sinuosités les plus nuisibles.

Pour résoudre ce problême, il faut supposer, 1°. qu'on aura mesuré la vitesse moyenne du courant, qui, dans ce cas, ne peut pas se calculer exactement par la formule, à cause de la résistance des coudes, qui augmentent la pente due à la vitesse; 2°. que par un nivellement très-exact on se sera assuré de la différence de niveau de la surface de l'eau de la rivière, sur une longueur suffisante; 3°. qu'on connoîtra le nombre & l'espèce de toutes les bricoles qui se forment sur cette longueur

D'après ces données, on calculera d'abord quelle est la dépense de la rivière, en multipliant sa section connue par sa vitesse moyenne, conclue de la mesure immédiate de celle à la surface, prise dans une partie droite du lit, le plus loin qu'on pourra des sinuosités qui pourroient troubler l'ordre des vitesses partielles du lit; & on nommera D cette dépense; on calculera ensuite, sur la longueur du lit qu'on aura choisie, quelle est la partie de la pente qui est due à la somme de toutes les bricoles; & après l'avoir retranchée de la pente totale de cette partie du lit, on vérifiera si le reste de la pente est suffisant, suivant la formule, pour imprimer au courant la vitesse qu'on a trouvée par l'observation: au cas que cela soit, on déterminera de combien la coupure des sinuo-

Digitized by Google

ſités, qu'on projette de redreſſer, raccourcit le développement du lit, & combien de bricoles ſe trouvent par là ſupprimées; on fera une ſomme de la nouvelle pente, ajoutée à la chute due aux bricoles ſupprimées, & on nommera cette pente $\frac{1}{b}$.

La largeur, ne devant point changer, ſera nommée l, & la hauteur cherchée du lit h; enfin pour éviter, comme ci-devant (124) les difficultés d'un problême, qui renferme toujours une équation du troiſième degré, on ſuppoſera de même une hauteur moindre que celle du lit, avant le redreſſement, d'après laquelle on cherchera la valeur du rayon moyen. L'équation $h = \frac{D}{l(\sqrt{r} - 0,1\left(\frac{297}{\sqrt{B}}\right) - 0,3}$ donnera la valeur approchée de h, & on achèvera le calcul de cette quantité, par la méthode d'approximation (125).

On ſent bien que pour donner à cette ſolution toute l'exactitude dont elle eſt ſuſceptible, il faut ſuppoſer que dans les autres parties du lit, au deſſus & au deſſous de celle dont il s'agit, on fera des redreſſemens ſemblables, qui, en accélérant auſſi la viteſſe, permettront à la ſection de la rivière de s'y abaiſſer proportionnellement.

129. Il faut convenir que ce moyen de rémédier aux débordemens, & de prévenir la rupture des digues eſt frayeux; mais rien n'oblige de le faire tout-à-coup; il arrivera même ſouvent que, comme il va au principe du mal, il coûtera moins

en effet que mille petits moyens qu'on emploie l'un après l'autre pour se garantir de l'injure des eaux. Combien ne dépense-t-on pas en effet en réparations de digues, quand elles ont été emportées, en épis, en canaux de desséchement, en exhaussemens des rues & des maisons des villes, & en curemens devenus nécessaires; sans parler de la superficie du terrein que consomment souvent en pure perte les sinuosités des rivières, de l'embarras pour le tirage des bateaux, & de la perte de tems qu'essuie la navigation.

Mais il seroit dangereux de redresser les sinuosités d'une rivière, dans une portion de son cours seulement, sans en faire autant dans le reste de l'espace qu'elle parcourt jusqu'à la mer, ou jusqu'à la rivière principale qui reçoit ses eaux; en agir ainsi, ce seroit soulager un canton pour en submerger un autre; car l'eau, en parcourant avec vitesse les espaces où l'on auroit fait les premiers redressemens, se porteroit avec abondance, en moins de tems pendant les accrues, dans ceux où la pente n'auroit point reçu d'augmentation, & y causeroit des débordemens beaucoup plus considérables qu'auparavant.

130. Il y a donc deux manières de s'y prendre, quand on veut travailler aux redressemens d'une rivière, pour le soulagement des riverains; la première est d'entamer ces redressemens par les parties les plus voisines de l'embouchure ou du confluent avec la rivière principale, & de perfectionner

Digitized by Google

l'ouvrage par degrés, en remontant jusqu'à l'endroit où on juge ce travail utile.

La seconde manière, & la plus parfaite, est de commencer à la fois les principaux redressemens, sur le cours entier de la rivière, en laissant des intervalles à-peu-près égaux, & n'entreprenant que ce que les fonds qu'on y destine annuellement permettent d'exécuter chaque année : ainsi une sinuosité redressée de demi-lieue en demi-lieue, ou de lieue en lieue, sera le travail de la première année ; ensuite on fera de nouveaux redressemens dans les intervalles des premiers, & ainsi de suite, jusqu'à ce que la rivière soit baissée au point qu'on desire, & qu'elle ne sorte plus de son lit, dans les plus grandes crues. Si cette rivière, qu'on peut supposer importante pour la navigation, n'avoit plus assez de profondeur pour porter bateau dans les tems de sécheresse, on pratiqueroit de distance en distance des écluses ou des sas, pour soutenir ses eaux ; mais on auroit la plus grande attention de tenir ces écluses ouvertes, tout le tems où les eaux de la rivière suffiroient à la navigation, & à plus forte raison, aux premières apparences de crues d'eau ; on les tiendroit encore ouvertes une fois par semaine, le dimanche tout entier, même en tems de sécheresse, afin de profiter du chommage de tous les moulins situés sur les petites rivières & les ruisseaux voisins, dont les meûniers auroient ordre d'ouvrir le même jour leurs écluses, pour qu'en rassemblant à la fois le

Digitized by Google

plus d'eau possible, & la faisant courir avec toute la pente naturelle de la rivière, elle lave le lit, & emporte les dépôts qu'occasionnent toujours les tenues, en ralentissant le cours de l'eau.

131. Nous osons dire que cette manière de travailler aux redressemens est la plus équitable & la moins coûteuse; la plus équitable, en ce que l'imposition se faisant sur le pays, tous les riverains jouiront en même tems d'un soulagement proportionné à la taxe qu'ils auront payée; & la moins couteuse, en ce que l'expérience, qui surpasse toujours la théorie en évidence aux yeux du commun des hommes, fera voir les avantages & les progrès du remède, ainsi que le terme où il faudra s'arrêter, pour ne point faire de dépense superflue; car l'abaissement des niveaux de la rivière se faisant par degrés d'année en année, on aura tout le loisir de discuter le point où il conviendra de s'arrêter, pour concilier tous les intérêts.

132. Cependant comme tout excès est nuisible, il pourroit arriver qu'en faisant trop de redressemens à une rivière, on donnât lieu à des accidens presqu'aussi fâcheux que ceux qu'on vouloit éviter; car la vitesse du courant, devenu plus rapide par l'augmentation de la pente, pourroit l'être au point de creuser le lit & de ronger les berges, ce qui donneroit lieu à plusieurs dégâts, dont le moindre seroit de rendre le lit variable & incertain, de confondre les propriétés, & de bouleverser les

Digitized by Google

poſſeſſions des riverains, ſans parler des effets plus funeſtes encore qui pourroient en réſulter dans les villes & les villages, où les bâtimens, les ponts & les quais ſeroient en danger d'être minés peu-à-peu par deſſous, & d'être renverſés.

Pour prévenir ces malheurs, & en conſidérant d'un autre côté que les inconvéniens des grandes crues ne ſont ordinairement cauſés que par le dernier, ou tout au plus les deux derniers pieds d'accroiſſement des eaux, on pourra s'attacher à ne prévenir que cette hauteur exceſſive, en retenant ſimplement les rivières dans leur lit; & à ce ſujet on peut propoſer le problême ſuivant.

PROBLÊME.

133. La largeur, la profondeur, la viteſſe, & la pente d'une rivière étant données, avec le nombre & la nature de ſes ſinuoſités; déterminer la pente qu'il faudroit lui donner, & par conſéquent les redreſſemens à faire, pour que ſa hauteur baiſſât & fût égale à une donnée, en conſervant la largeur ordinaire du lit.

Puiſqu'on ſuppoſe connues la ſection & la viteſſe d'une rivière, dans le tems de ſes plus grandes crues, on connoîtra la dépenſe : d'un autre côté, on a fixé une hauteur de ſection moindre que la première, où l'on veut que les eaux puiſſent arriver ſans la paſſer, & la largeur reſte conſtante; ainſi la nouvelle ſection eſt auſſi connue : on diviſera la dépenſe par cette nouvelle ſection, &

Digitized by Google

l'on aura la vitesse moyenne uniforme de la rivière : la seule inconnue est donc la pente due à cette vitesse moyenne ; mais comme on a (62) l'équation $\sqrt{b} - L.\sqrt{b + 1,6} = \frac{297(\sqrt{r} - 0,1)}{V + 0,3(\sqrt{r} - 0,1)}$, on trouvera aisément la valeur de b, & par conséquent la pente $\frac{1}{b}$.

Mais cela ne suffit pas ; car quoiqu'on connoisse, selon l'énoncé du problême, la pente totale de la rivière, avant le redressement, qu'on peut exprimer par $\frac{1}{B}$, & la pente destinée à vaincre la résistance du lit direct après le redressement, $\frac{1}{b}$, il ne s'ensuit pas que les longueurs développées du lit dans les deux cas, doivent être : : b : B, parce que le lit, redressé en partie, doit conserver un certain nombre de coudes dont il faut vaincre la résistance : ainsi $\frac{1}{b}$ est trop petit, ou le dénominateur b est trop grand. On peut donc faire ce raisonnement : si la rivière, après le redressement, ne conservoit aucune sinuosité, la pente devroit être égale à $\frac{1}{b}$; mais après l'examen préliminaire des principales sinuosités qu'il faudra couper, il restera sur la longueur b un certain nombre de bricoles, dont la résistance totale, relative à la nouvelle vitesse, sera, si l'on veut, exprimée par m. Donc la pente est $\frac{1+m}{b}$, c'est-à-dire qu'il faut tellement régler le nombre & l'espèce des redressemens, que la pente sur la longueur b soit égale à $1+m$.

Digitized by Google

134. Mais ſi une rivière étoit aſſez encaiſſée pour n'avoir point à craindre de débordemens dans le tems des crues, que cependant ſa viteſſe fût alors plus grande qu'il ne convient au régime, de ſorte que ſon lit fût variable, & menaçât, par ſes déplacemens, de cauſer de grands dommages, ou bien que dans le tems où les eaux ſont réglées, & à leur hauteur moyenne, la profondeur ne fût pas ſuffiſante pour rendre la rivière navigable, ou au moins flottable, on pourroit deſirer de diminuer ſa viteſſe, lors des crues, en la rendant égale à une donnée, ou d'augmenter ſa profondeur, dans l'etat moyen, en la rendant égale à une autre donnée: or, dans ces deux cas, on ne peut remplir les conditions demandées, qu'en alongeant ſon cours, en lui faiſant faire de nouvelles ſinuoſités, ajoutées de diſtance en diſtance aux anciennes, dans les lieux les plus propres à cela, & en conſervant cependant au lit la même largeur qu'il avoit d'abord. On peut donc propoſer les deux problêmes ſuivans.

PROBLÊME.

135. Une rivière, dont le régime n'eſt pas établi, ou dont la viteſſe, dans le tems des crues, eſt trop grande, étant donnée avec ſa pente, ſa ſection, ſa viteſſe & ſes coudes; déterminer de combien il faudroit augmenter le développement de ſon cours, pour que ſa viteſſe devînt convenable au régime.

Digitized by Google

Pour rendre plus ſenſible la ſolution de ce problême, nous en ferons l'application à une rivière qui a 50 pieds de largeur ſur 8 de profondeur, dans le tems de ſes plus grandes crues, avec une pente de $\frac{1}{8000}$, & des ſinuoſités telles qu'elles augmentent cette pente de $\frac{1}{25}$, en ſorte que la pente réelle eſt égale $\frac{1}{7680}$, & que pour 40000 toiſes de longueur de cours direct, le lit a 60000 toiſes de longueur developpée, avec une viteſſe de 26$^{po.}$,948 par ſeconde. On demande de réduire cette viteſſe à celle de 24 pouces, en conſervant au lit la même largeur, & en alongeant ſeulement ſa longueur développée, répondante à 40000 toiſes de cours direct.

SOLUTION.

Puiſque le lit développé a 60000 toiſes de longueur, avec une certaine quantité de coudes connue, on peut ſuppoſer qu'en augmentant ce développement, on augmentera le nombre des coudes dans le même rapport, & par conſéquent auſſi la réſiſtance de ces coudes : ainſi la pente totale de la rivière étant égale à $\frac{1}{7680}$, la différence de niveau ſur la longueur développée de 60000 toiſes, eſt de 46$^{pi.}$,875, dont le 25$^{me.}$ ou 1$^{pi.}$,75 ſont employés à vaincre la réſiſtance des premiers coudes, avec la viteſſe de 26$^{po.}$,948 : or, cette réſiſtance étant proportionnelle au quarré des viteſſes, elle ſe réduira à 1$^{pi.}$,386, avec la viteſſe de 24 pouces; & ſi on nomme x le rapport du

Digitized by Google

premier alongement, causé par les premières sinuosités, à l'alongement total, causé par toutes les sinuosités, cet alongement total sera $x \times 20000$ toises, & la résistance totale des coudes sera aussi $x \times 1^{pi.}, 386$.

Pour connoître la longueur du nouveau cours, il faut considérer que, si on divise la dépense de la riviére, qui est de $898^{pi.}, 267$ par seconde, par la nouvelle vitesse de 24 pouces ou 2 pieds, le quotient $449^{pi.}, 133$ sera la section du nouveau lit, & cette quantité, divisée par la largeur du lit ou 50 pieds, donne $8^{pi.}, 982$ pour la hauteur; son rayon moyen sera de $6^{pi.}, 608$, ou $79^{po.}, 296$: en cherchant la pente relative à un tel rayon moyen & à la vitesse de 24 pouces, on la trouvera égale à $\frac{1}{12893}$.

On peut alors former l'équation suivante $\frac{46,875 - 1,386x}{240000_{pi.} + 120000x} = \frac{1}{12893}$; c'est à-dire que la différence de niveau employée à vaincre la résistance seule du lit, avec la vitesse de 24 pouces, divisée par 240000 pieds de longueur, plus $120000x$, qui est la quantité dont les sinuosités alongent le cours, est égale à la pente que nous venons de trouver; ce qui donne $x = 2,6418$.

Ainsi l'augmentation de lit, causée par les sinuosités, devient égale à 52836 toises, au lieu de 20000; la longueur totale développée est de 92836 toises; & la partie de la pente employée à vaincre la résistance des coudes, sera de $3^{pi.}, 6615$.

On

Digitized by Google

On voit donc que, pour obtenir l'avantage que l'on s'eſt propoſé, il faudroit creuſer près de 33000 toiſes de nouveau lit, opération trop coûteuſe pour être entrepriſe par préférence aux autres moyens qu'on peut trouver de fixer l'inconſtance de ce lit. Venons au ſecond problême.

PROBLÊME.

136. Connoiſſant la largeur, la profondeur dans l'état moyen des eaux, la pente, la viteſſe & les coudes d'une rivière dont la viteſſe eſt trop grande dans le tems des crues; déterminer de combien il faudroit augmenter le développement de ſon cours, pour que ſa profondeur devînt égale à une donnée convenable à la navigation ou au flottage.

Prenons encore pour exemple la même rivière que ci-deſſus, dont la largeur, dans l'état ordinaire de ſes moyennes eaux, ſe trouveroit réduite à 40 pieds, & la profondeur moyenne à deux pieds, de ſorte que vers le milieu du lit la profondeur ne ſeroit que d'environ 3 pieds, qui ne ſuffiroient pas pour la rendre navigable ou flottable avec commodité. On propoſe donc de déterminer, dans le cas où on voudroit alonger ſon cours, pour obliger ſa ſa ſection à s'élever juſqu'à 3 pieds de hauteur moyenne, la meſure de cet alongement.

On ſuppoſe, comme ci-devant, que le cours direct n'étant que de 40000 toiſes, la rivière en a déja 60000 de développement, à cauſe de ſes

Digitized by Google

ſinuoſités; que la pente totale de la rivière, ſur cette longueur, eſt égale à $\frac{1}{7680}$, ce qui fait $46^{pi.},875$ de différence de niveau d'un bout à l'autre, deſquels il y en a $46^{pi.},346$ employés à vaincre la réſiſtance du lit, & ſeulement $0^{pi.},529$ employés à vaincre celle des coudes; la viteſſe n'étant que de $14^{po.},858$ par ſeconde.

SOLUTION.

Puiſque la rivière a 40 pieds de largeur ſur 2 pieds de profondeur, avec une viteſſe de $14^{po.},858$, ſa dépenſe eſt de $99^{pi.},05328$; & cette dépenſe, diviſée par la nouvelle ſection propoſée de 40 pi. ſur 3 pieds, donne, dans ce cas, la viteſſe égale à $9^{po.},905$: la réſiſtance des coudes ſe trouvera donc réduite à 0,2359; le rayon moyen ſera $2^{pi.},60869$ ou $31^{po.},30418$; la pente qui convient à ce rayon moyen & à la viteſſe ſe trouvera (62) égale à $\frac{1}{28845}$.

Ainſi on pourra former, comme ci-devant, l'équation $\frac{46,875-0.2359x}{240000^{pi.}+120000x}=\frac{1}{28845}$, ce qui donne le raport $x=8,77$; ainſi l'alongement $120000^{pi.}x$, cauſé par les ſinuoſités, devient égal à 175400 toiſes, au lieu de 20000; la longueur totale développée du lit ſeroit de 215400 toiſes; & la pente due à la ſomme de tous les coudes ſeroit de $2^{pi.},0688$.

137. On voit par là l'impoſſibilté morale où l'on

Digitized by Google

eſt de rendre navigables, par ce moyen, des rivières dont il faudroit preſque quadrupler le cours, pour gagner quelques pieds de plus en profondeur, au-delà de celle qu'elles ont naturellement : on eſt donc obligé, dans cette vue, de recourir aux tenues d'écluſes, ou aux canaux de navigation parallèles aux rivières ; il eſt vrai que ce dernier moyen eſt très-diſpendieux, parce qu'outre le travail néceſſaire pour en creuſer les déblais, il eſt indiſpenſable d'y joindre des ſas, pour racheter les pentes, & des aqueducs, pour jeter dans la rivière, par deſſous le canal, les ruiſſeaux & les petites rivières qui ſe trouvent traverſés par ſon lit ; mais c'eſt néanmoins le meilleur moyen de ſe procurer une navigation ſûre & commode, pourvu que l'on ne manque point d'eaux claires pour nourrir le canal, ſans être obligé d'uſer de celles de la rivière, lorſqu'elles ſont troubles.

238. Faiſons, avant de finir ce chapitre, une remarque importante ſur les rivières qui ſont ſujettes aux débordemens, & dont alors la viteſſe eſt plus grande qu'il ne convient au régime. Nous avons déja obſervé qu'il pourroit être dangereux de redreſſer leur lit ; du moins nous avons donné le moyen de régler ce redreſſement ſelon la juſte meſure de la néceſſité, pour ne faire baiſſer la ſurface de la rivière, groſſie par les accrues, que de la hauteur dont elles menacent de ſurpaſſer leurs digues ; mais il eſt ſouvent à craindre que l'on ne prenne le change dans l'évaluation de la plus

Digitized by Google

grande hauteur des crues, & qu'il n'en ſurvienne de loin en loin quelques unes, qui aillent fort au-delà du point qu'on avoit prévu. Si, par exemple, il ſurvient une forte gelée, qui ſoit ſuivie d'une grande abondance de neiges, & qu'un dégel ſubit, accompagné quelquefois de pluie, vienne vienne tout-à-coup à fondre la neige, il eſt indubitable qu'il y aura des crues exceſſives dans les rivières, parce que le ſol des campagnes, durci par la gelée, & impénétrable à l'eau, n'en admettra point en ſoi par l'infiltration, & en abandonnera l'écoulement tout entier au lit des rivières : cette cauſe de débordemens, déja grave par elle-même, ſe réunira à deux auutres circonſtances très-fâcheuſes; la première eſt la débacle des glaces, qui, venant à embarraſſer le paſſage des ponts, s'y amoncèlent comme un batardeau, & arrêtent le cours de l'eau, en l'obligeant de s'élever dans la partie ſupérieure, d'ou il réſulte une élévation exceſſive des eaux, qui inondent tout, & renverſent les ponts eux-mêmes, & les édifices les plus ſolides. La ſeconde eſt l'impoſſibilité de réparer les ruptures des digues & des chauſſées, ſoit parce que l'inondation couvrant tout, il ne ſe trouve point de terres qu'on puiſſe y employer, ſoit parce que les terres que l'eau ne couvre pas ſont tellement gelées qu'on ne peut s'en ſervir & les déblayer. Les inondations deviennent alors des fléaux terribles, plus deſtructeurs que le feu, & qui coûtent la vie à beaucoup de citoyens. Il eſt hors de doute

Digitized by Google

que dans ces circonſtances extrêmes, la prudence exige des perſonnes publiques qu'elles faſſent rompre les ponts, & abattre, s'il eſt poſſible, les obſtacles qui arrêtent le cours des eaux, parce que la vie des hommes ne doit pas ſe balancer avec la conſervation douteuſe d'un ouvrage qu'on peut rétablir à prix d'argent.

139. Lors donc qu'il ſeroit ou dangereux ou impoſſible de prévenir les débordemens & les inondations par les redreſſemens, il reſte une reſſource dans les levées & les digues qu'on élève le long des rivières, dans les parties baſſes, où elles ont accoutumé de ſortir de leur lit. Il eſt vrai que ces digues ne rempliroient pas leur objet, ſi l'on n'en faiſoit de ſemblables aux rivières de la ſeconde claſſe, qui aboutiſſent à la rivière principale; car quoiqu'il arrive le plus ſouvent que ces rivières ſecondaires & les ruiſſeaux aient une pente beaucoup plus grande, & moins de diſpoſition à élever leurs eaux à de grandes hauteurs par les crues, comme elles ſont cependant retenues par l'élévation de la principale rivière, dans laquelle elles ſe jettent, il eſt néceſſaire que leurs digues ſoient auſſi élevées que les autres, du moins au confluent, & en remontant juſqu'à la diſtance néceſſaire, pour que le remou des eaux de la rivière principale ne s'y faſſe plus ſentir. Les terrains compris entre ces digues reſpectives ne peuvent pas avoir d'écoulement, tant que durent les accrues; & elles forment différentes petites inondations, qui ne peuvent ſe

Digitized by Google

deſſécher que par de petites vannes & des aqueducs pratiqués ſous les digues, & lors ſeulement que les eaux des rivières ſont rentrées dans leurs lits.

Pour tirer de ces digues ou levées tout l'avantage qu'elles peuvent procurer, il eſt convenable de ne les pas faire immédiatement au bord des rivières, où il eſt à craindre que la rapidité du courant ne les attaque & ne les mine, mais à une diſtance de chaque rive qui ſoit proportionnée à la largeur du lit. On pourroit fixer cette diſtance à la moitié de la largeur du lit, afin que quand les eaux de la rivière ſortent du lit ordinaire, elles s'étendent dans un lit double, où la viteſſe des bords devient beaucoup moindre : l'eſpace compris entre la rivière & ſes digues ne ſeroit pas perdu; on pourroit y laiſſer croître l'herbe, & en faire des pâturages, qui ſeroient ordinairement bons, à moins que la rivière ne chariât du ſable fin, qui, en ſe dépoſant ſur ces grandes bermes, les rendroit ſtériles.

CHAPITRE III.

De la dépenſe des reverſoirs. Des vannages & des tenues d'écluſe. De la hauteur & de l'amplitude des remous. Des ponts.

140. APRÈS avoir examiné quelles ſont les lois que ſuivent les eaux, quand elles coulent dans des

Digitized by Google

lits uniformes & conſtans, il faut à préſent conſidérer comment, par une ſuite des mêmes lois, elles ſe détournent, s'élèvent ou s'abaiſſent ; comment elles retardent & accélèrent leur mouvement, quand un obſtacle s'oppoſe à l'uniformité de leur cours. Nous avons déja vu que quand l'eau eſt forcée à changer de direction, pour ſe plier dans un lit tortueux, elle emploie un effort égal au poids d'une certaine chute ; & elle perd, pour le reſte de ſon mouvement uniforme, quelques degrés de viteſſe qu'elle auroit eus de plus, ſi elle eût eu cet obſtacle de moins à vaincre.

L'induſtrie humaine, animée par le beſoin, a imaginé d'employer l'action de l'eau à mouvoir des machines qui ſoulagent ſa foibleſſe, & ménagent ſon repos. Voilà l'origine des moulins & des uſines. La néceſſité de communiquer avec ſes voiſins, quoique ſéparés d'eux par des barrières naturelles, qui ſont les fleuves & les rivières, a donné lieu à la conſtruction des ponts, qui, faits d'abord en bois, mais trop foibles & peu durables, ont été remplacés par des piles de maçonnerie, jointes enſemble par des arcades. Enfin la facilité de tranſporter par eau de gros fardeaux & des marchandiſes peſantes, a fait deſirer de rendre navigables des rivières qui n'y paroiſſoient pas propres, à cauſe de leur peu de profondeur ; voilà l'origine des écluſes. On ne peut remplir ces trois objets ſans interrompre l'uniformité du cours des rivières : c'eſt ſous ce point de vue que nous allons les

Digitized by Google

considérer dans ce chapitre. Ce n'est pas proprement des reversoirs, des ponts & des écluses que nous allons parler, mais plutôt de l'effet qui résulte de ces ouvrages sur l'état des rivières, & du changement qu'ils occasionnent dans la hauteur, la vitesse & la dépense des eaux. L'ordre des matières & la clarté demandent que nous parlions d'abord de la dépense des reversoirs.

141. On sait qu'en général un reversoir est une digue solide, faite en terre, en maçonnerie ou en bois, qui traverse le lit d'un courant, dont elle force l'eau à s'élever, jusqu'à ce qu'ayant égalé sa hauteur, & la surpassant ensuite, elle reverse par dessus, & forme une chute ou une nappe d'eau, pour retomber dans son lit inférieur.

On peut distinguer deux sortes de reversoirs, *les reversoirs complets* & *les demi-réservoirs*. J'appelle reversoir complet celui où l'eau passant sur un radier ou sur un seuil quelconque, considéré comme fort mince, tombe dans un bassin ou dans un lit inférieur, dont la surface est plus basse, ou du moins n'excède point le niveau du seuil du reversoir; & le demi-reversoir est celui où la surface du bassin ou du lit inférieur est plus haute que le seuil, tellement que l'eau ne reverse qu'en partie, tandis que le reste coule sans reverser: mais on peut encore, dans chacun de ces deux cas, distinguer deux circonstances essentielles; la première, quand l'eau qui reverse part d'un réservoir entretenu constamment plein, & dont l'eau n'a point de

Digitized by Google

mouvement propre qui concourre au reverſement; la ſeconde lorſque l'eau affluente au reverſoir a déja un mouvement & une viteſſe acquiſe, dans la direction du reverſoir. Sur cette matière, ainſi diviſée, on peut former pluſieurs queſtions, qui vont faire le ſujet d'autant de problêmes.

PROBLÊME.

142. Si dans une des faces d'un réſervoir entretenu conſtamment plein d'une eau dormante, on pratique un reverſoir d'une largeur & d'une profondeur données; on demande de déterminer la dépenſe d'eau qui s'y fera, le reverſoir étant complet.

Soit un baſſin ABCD, conſtamment entretenu plein, dont AB ſoit la ſuperficie : ſi dans une de ſes faces BC on pratique une ouverture par laquelle l'eau puiſſe s'échapper ſur une hauteur BF, que nous nommerons h, & ſur une largeur que nous nommerons l; on ſuppoſe que l'eau échappée du réſervoir ſoit reçue dans un autre baſſin ou lit inférieur, dont la ſurface ſoit plus baſſe que le point F, ou au moins de niveau à ce point; on demande quelle ſeroit la dépenſe de ce reverſoir. Fig. 16.

SOLUTION.

Si l'eau pouvoit ſe ſoutenir horizontalement juſqu'en B, la hauteur BF pourroit être conſidérée

Digitized by Google

comme celle de l'orifice; & la chute moyenne, due à la viteſſe de l'écoulement, ſeroit égale a $\frac{4}{9}h$. Ainſi, en ſuppoſant auſſi la contraction d'orifice nulle, la viteſſe moyenne ſeroit exprimée par $\sqrt{2g\frac{4}{9}h} = \sqrt{724 \times \frac{4}{9}h}$, & la dépenſe ſeroit $lh\sqrt{724 \times \frac{4}{9}h}$: c'eſt la théorie ordinaire.

Mais les effets naturels ſont bien différens, & la première ſuppoſition eſt impoſſible; car l'eau, avant de parvenir au deſſus du reverſoir, forme à ſa ſurface une courbe, & elle éprouve une chute qui diminue conſidérablement la hauteur de l'orifice, en conſervant néanmoins la même charge BF, pour les filets inférieurs. Toutes choſes alors ſe paſſent comme ſi l'eau s'écouloit par deſſous une vanne abaiſſée de B en I, derrière laquelle l'eau ſe tiendroit de niveau à la ſuperficie AB du baſſin. Il eſt hors de doute que la hauteur IF doit dépendre de la hauteur entière BF, & qu'il doit exiſter un rapport entre ces deux quantités; c'eſt ce que nos expériences ont confirmé, & nous avons trouvé ce rapport : : 1 : 2. Il eſt vrai que nons n'avons point vérifié le fait par une meſure immédiate; mais nous l'avons ſeulement déduit des dépenſes relatives à différentes charges au deſſus du reverſoir. Ainſi, ſans pouvoir aſſurer que l'eau s'abaiſſe réellement, & exactement de la moitié de ſa hauteur au deſſus du reverſoir, on verra cependant que les dépenſes, calculées d'après cette hypothèſe, s'accordent aſſez bien avec l'expérience.

Digitized by Google

Si du point B on décrit une parabole BEGK, la viteſſe des filets au point I ſera repréſentée par IE, & celle des filets au point F le ſera par FG; d'où l'on tireroit une ſolution ſynthétique : ou bien ſoient D la dépenſe par ſeconde du reverſoir, h la hauteur entière BF, 2G la quantité par laquelle il faut diviſer le quarré de la viteſſe moyenne par ſeconde, pour avoir la hauteur de chute qui lui eſt due; x la diſtance d'un point quelconque de la ſection au niveau B du baſſin : ſi on imagine la ſection diviſée ſur toute ſa hauteur en une infinité de tranches égales, & de même hauteur, la hauteur d'une de ces tranches ſera dx; la ſurface de cette tranche ldx; ſa viteſſe $\sqrt{2Gx}$; ſa dépenſe ſera $l\sqrt{2G}x^{\frac{1}{2}}dx$; & on aura $D = S l\sqrt{2G}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}l\sqrt{2G}x^{\frac{3}{2}} + c$. Pour déterminer la conſtante c, il faut remarquer que l'écoulement n'a pas lieu au deſſus de I, & qu'on a $D = 0$, lorſque $x = BI = \frac{1}{2}h$; ainſi $c = -\frac{2}{3}l\sqrt{2G}(\frac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}}$: alors $D = \frac{2}{3}l\sqrt{2G}(x^{\frac{3}{2}} - (\frac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}})$. Faiſant $x = h$, pour avoir l'intégrale complette, on aura $D = \frac{2}{3}l\sqrt{2G}(h^{\frac{3}{2}} - (\frac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}}) = 0{,}431\, l\sqrt{2G}\, h^{\frac{3}{2}}$; ce qu'il falloit trouver.

143. Si on calcule, d'après cette formule, les quatre expériences que nous avons faites ſur les reverſoirs, qu'on trouvera ci-après (410), en ſuppoſant $2G = 681$, ou $\sqrt{2G} = 26{,}1$, ainſi que nous l'avons fixé ci-devant (12), ſous la dénomi-

Digitized by Google

nation de $724-K$, & qu'on faſſe $l=17^{po.},25$, on aura le tableau ſuivant, qui préſente la comparaiſon des dépenſes calculées à celles de l'expérience.

NUMÉROS des expériences.	HAUTEURS du baſſin, au deſſus du reverſoir, ou valeur de h.	DÉPENSE des reverſoirs, ſuivant la théorie.	DÉPENSE des reverſoirs, ſuivant l'expérience.
	po.	po.	po.
185	1,6666	417,2	432,0
186	3,0000	1008,3	1004,4
187	4,3750	1775,7	1776,6
188	6,3333	3092,7	3110,4

On voit par ce tableau que les dépenſes ſont aſſez conformes à ce que nous venons d'établir ; il ſembleroit que la première de ces expériences indiquât une contraction preſque nulle, ce qui ne ſeroit pas étonnant avec une auſſi petite charge.

Il ſuit delà, que ſi la dépenſe d'un reverſoir complet, pratiqué dans une des faces d'un baſſin, entretenu plein d'eau dormante, étoit connue, ainſi que la largeur du reverſoir, on connoîtroit auſſi la hauteur de l'eau du baſſin, au deſſus du ſeuil du reverſoir, ou h ; car l'équation précédente donne $h=\left(\frac{D}{0,431l\sqrt{2G}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

PROBLÊME.

144. La dépenſe & la ſection d'une rivière étant

connues, si on barre son cours par un reversoir, dont la hauteur au dessus du fond de la rivière soit connue, & dont la largeur soit égale à celle de la rivière; déterminer la hauteur à laquelle l'eau de la rivière s'élèvera au dessus du reversoir, pour passer par dessus.

Dans le problême précédent nous avons supposé que l'eau passoit du repos au mouvement, & qu'il y avoit contraction sur trois faces de l'orifice; dans celui-ci on suppose que l'eau, avant de reverser, a déja une vitesse acquise, & que la contraction n'a lieu qu'à la base inférieure de l'orifice du reversoir, puisque sa largeur égale celle de la rivière : nous ferons donc ici $2G = 700$ (§ 12). Quant à la vitesse déja acquise en arrivant au reversoir, elle est égale à la dépense divisée par la section de la rivière au dessus du reversoir; car nous avons en effet remarqué dans notre canal que l'eau du fond couloit jusqu'à l'amont du reversoir, & qu'après l'avoir choqué, elle se relevoit, pour passer au dessus.

SOLUTION.

Nommant donc a la hauteur du reversoir au dessus du fond de la rivière, l la largeur commune à la rivière & au reversoir, h la hauteur de la surface de la rivière, au dessus du reversoir, & D la dépense commune; $\frac{D}{l(a+h)}$ sera la vitesse moyenne acquise avant de reverser, & $\left(\frac{D}{l\sqrt{2g}(a+h)}\right)^2$ sera

la hauteur naturelle due à cette vitesse : la première équation (143) donne $h = \left(\frac{D}{0,431\, l\sqrt{2G}}\right)^{\frac{2}{3}}$, quand l'eau d'amont est en repos; ainsi avec une vitesse acquise, on aura $h = \left(\frac{D}{0,431\, l\sqrt{2G}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{D}{l\sqrt{2g}\,(a+h)}\right)^{2}$.

Sans chercher à compliquer cette équation, en dégageant h du second terme, on voit que la hauteur due à la vitesse acquise est toujours peu considérable, relativement à h, & que cette quantité, estimée seulement dans le second terme, ne change pas sensiblement sa valeur réelle. D'ailleurs, en répétant l'opération, on peut corriger cette valeur, & l'obtenir avec une précision suffisante ; ce qu'il falloit trouver.

145. C'est ainsi que nous avons calculé les expériences rapportées (413) à la suite des précédentes, & dont le tableau suivant offre le résultat.

NUMÉROS des expériences.	DÉPENSE de reversoirs par seconde.	HAUTEUR due à la vitesse sur le reversoir.	HAUTEUR due à la vitesse acquise.	HAUTEUR calculée au dessus du reversoir.	HAUTEUR au dessus du reversoir, suivant l'expérience.
eme.		po.	po.	po.	po.
189	3888,0	7,302	0,625	6,677	6,583
190	2462,4	5,385	0,350	5,035	4,750
191	1112,4	3,171	0,116	3,055	3,166
192	259,2	1,2006	0,0114	1,189	1,250

On doit remarquer que dans ces expériences il n'étoit pas aisé de prendre en amont la plus grande hauteur au dessus du reversoir, qui s'en trouvoit éloignée d'environ cinq pieds, autant que nous

Digitized by Google

en avons pu juger, quoique cette diſtance ne dût pas être conſtante pour les différentes expériences. Ainſi, nous ne pouvons pas garantir, à une ligne près, la juſteſſe de nos meſures.

PROBLÊME.

146. Connoiſſant la hauteur d'un reverſoir non complet, au deſſus du fond d'une rivière, la hauteur conſtante de l'eau en aval du reverſoir, plus grande que celle du reverſoir, la hauteur de l'eau en amont au deſſus du reverſoir, & la largeur commune du reverſoir & de la rivière; déterminer la dépenſe du reverſoir ou de la rivière.

Soit une rivière, dont le fond eſt MN, & la ſurface, élevée par le reverſoir, LE, la hauteur du reverſoir AB, la hauteur de l'eau inférieure BC > AB, & la largeur commune l; on demande la dépenſe commune. Fig. 17.

SOLUTION.

Ce problême ſeroit moins compliqué, ſi on ſuppoſoit le baſſin LFMB entretenu conſtamment plein d'eau ſans mouvement; on pourroit alors ſuppoſer que le reverſoir eſt complet ſur la hauteur EC, & on trouveroit la dépenſe de cette partie de la ſection par le problême du paragraphe 152. Quant à la dépenſe du reſte de la ſection ſur la hauteur CA, elle ſeroit égale au produit de cette

Digitized by Google

partie de la ſection pat la hauteur due à la chute EC, qui eſt la différence des hauteurs de l'amont à l'aval du reverſoir. La ſomme de ces deux dépenſes ſeroit celle du reverſoir; mais puiſqu'on ſuppoſe que le reverſoir eſt établi ſur une rivière, ſa dépenſe égalera celle de la rivière, dont l'eau, en arrivant au reverſoir, aura une viteſſe acquiſe, qui ſera due à une chute qui pourra être exprimée par FE : or, cette viteſſe, multipliée par la ſection de la rivière, ſur la hauteur EB, devra donner une dépenſe égale à celle du reverſoir. Pour éluder cette complication, on pourroit chercher d'abord la dépenſe du reverſoir, de la manière que nous venons de dire, en ne ſuppoſant point de viteſſe acquiſe : cette dépenſe un peu trop foible étant diviſée par la ſection FB, donneroit la viteſſe acquiſe un peu foible, mais extrêmement approchée; on connoîtroit donc la hauteur FE, au moyen de laquelle on ſeroit en état de déterminer la viteſſe moyenne entre DG & CH, qui convient au réſervoir complet, & celle CH qui convient à la partie plongée de la ſection. On pourroit enfin rectifier de nouveau la valeur de la viteſſe acquiſe & de ſa chute, &c.

147. Si on calcule de cette manière la dépenſe que devroit faire le reverſoir non complet de notre cent quatre-vingt-treizième expérience on la trouvera peu différente de celle que nous avons trouvée : cependant le calcul la donne un peu plus forte que l'expérience, ce qui pourroit être attribué

à

Digitized by Google

à une augmentation de contraction, causée par la pente que prend la veine fluide du reversoir complet, qui diminue la dépense du bas de l'orifice au dessus du reversoir.

148. Puisque nous savons calculer la hauteur à laquelle l'eau doit s'élever au dessus d'un reversoir, pour fournir à une dépense connue, si on ajoute à cette hauteur celle du reversoir au dessus du fond du lit, & que de cette somme on retranche la profondeur uniforme de la rivière avant l'établissement du reversoir, on connoîtra l'exhaussement qu'il aura occasionné à la surface de l'eau de la rivière; c'est ce qu'on appelle le *remou*. Nous sommes donc en état de résoudre le problême général qui suit.

PROBLÊME.

La largeur, la profondeur & la pente d'une rivière étant données, si on barre son lit par une écluse & une vanne d'une hauteur & d'une largeur connues; déterminer la hauteur du remou en amont de la tenue, c'est-à-dire de combien la surface de l'eau de la rivière s'élèvera, pour reverser en nappe par dessus la vanne.

SOLUTION.

Puisque la largeur, la profondeur & la pente de la rivière sont connues, on connoîtra aussi sa vitesse & la quantité d'eau qu'elle dépense: ainsi, par le

Digitized by Google

problême précédent (144), on cherchera la hauteur dont la ſurface de l'eau s'élevera au deſſus du reverſoir, dont la hauteur eſt auſſi donnée, & ſi de la ſomme de ces deux hauteurs on retranche la profondeur ordinaire de la rivière, on aura la hauteur du remou qu'on demande. Appliquons cette ſolution à un exemple.

149. Suppoſons une rivière dont la profondeur, dans les eaux moyennes, eſt de 3 pieds, & le lit de 40 pieds de largeur, la pente un pouce & demi par 100 toiſes; & qu'en travers de ſon lit on ait deſſein de conſtruire une écluſe, avec une vanne on une tenue de poutrelles de 6 pieds de hauteur au deſſus du fond, ſur 18 pieds de largeur de paſſage : on demande la hauteur du remou qu'occaſionnera cette tenue.

La première opération qu'il faut faire eſt de déterminer la viteſſe & la dépenſe de la rivière dans ſon état naturel; & comme on a $l = 480^{po.}$, $h = 36^{po.}$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{4800}$, on trouvera, par la formule (51), $V = 23^{po.},45$, & la dépenſe ou $D = 405216$ pouces cubes.

La contraction d'orifice au paſſage du reverſoir ayant lieu ſur trois côtés, nous pouvons faire $2G = 681$, & $\sqrt{2G} = 26,1$: on aura auſſi $a = 72^{po.}$, $2G = 724$. Ainſi l'équation $h = \left(\frac{D}{0,431\, l\sqrt{2G}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{D}{l\sqrt{2G}\,(a+h)}\right)^{2}$ devient $h = 30^{po.},276 - 0^{po.},094 = 30^{po.},182$; ajoutant cette hauteur à celle de la

vanne, la profondeur en amont de l'écluse sera $102^{po.},182$, dont il faut retrancher 36 pouces, qui est la profondeur ordinaire de la rivière, pour avoir la hauteur du remou, qui est de $66^{po.},182$; ce qu'il falloit trouver.

150. On sent bien que le remou fait gonfler les eaux de la rivière jusqu'à une distance assez grande de la tenue, mais que son effet diminue de plus en plus, jusqu'au point où il cesse d'être sensible, & où la rivière est réduite à sa profondeur ordinaire : nous supposons toujours que le lit conserve sa pente & sa largeur ordinaire. Ainsi la hauteur du lit, à partir du point où le remou cesse d'être sensible, jusqu'à la tenue, va toujours en croissant; & comme la dépense est constante, les vitesses décroissent sensiblement en raison inverse des hauteurs, ce qui ne peut avoir lieu sans que la pente à la surface ne varie par la même cause. La surface de l'eau de la rivière forme donc, dans toute l'étendue du remou, que nous nommerons son amplitude, une courbe concave, tangente à la surface naturelle de l'eau de la rivière, à l'extrémité de cette amplitude. La nature & l'étendue de cette courbe ne peuvent être connues rigoureusement que par la formule du mouvement uniforme, qui, sous ce point de vue, devient trop compliquée.

Soit FKLB la coupe longitudinale d'une rivière dont la pente soit $\frac{1}{b}$, la profondeur FK ou BL $= h$, & la largeur l : soit aussi une tenue placée en B, Fig. 18.

qui faſſe gonfler l'eau de la quantité BA, qu'on peut nommer H.

J'obſerve d'abord que ſi la ſurface de l'eau, au deſſus de la tenue, pouvoit être de niveau comme AG, le remou finiroit en G, point dont il ſeroit aiſé de calculer la diſtance au point A : mais il n'eſt pas poſſible que la ſurface de l'eau en amont de l'écluſe ſoit horizontale; car pour cela il faudroit qu'elle n'eût aucun mouvement, ce qui eſt contraire a la ſuppoſition que l'eau fournie par la rivière reverſe en A. L'eau y a donc une pente qui doit être proportionnée à la capacité du lit dans lequel elle coule : or, le lit étant plus profond près de l'écluſe, à cauſe de la hauteur de la tenue, la pente y doit être moindre que par-tout ailleurs, & ſi cette pente eſt repréſentée par la ligne inclinée AD, cette ligne ſera tangente à la courbe au point A, & elle rencontrera au point D la ligne FD, qui eſt le prolongement de la ſurface de la rivière. Cette ligne FD eſt elle-même tangente à la courbe FIA. Parmi toutes les ſuppoſitions qu'on peut faire ſur la nature de cette courbe, arrêtons-nous un moment à celle du cercle, qui donne AD = DF; & propoſons-nous le problême ſuivant.

PROBLÊME.

151. En ſuppoſant toutes les données du problême précédent, & dans l'hypothèſe que la courbe formée par la ſurface de l'eau au deſſus d'une

Digitized by Google

tenue, eſt un arc de cercle ; déterminer l'amplitude du remou, & ſa hauteur à une diſtance quelconque de la tenue.

Puiſque la ligne AD doit être tangente à la ſurface de l'eau, près de la tenue A, & avoir même pente que le courant au deſſus du reverſoir, il faut d'abord chercher quelle eſt cette pente. Tout eſt connu ici, la largeur, la profondeur du lit, le rayon moyen par conſéquent, & la viteſſe, qui eſt égale à la dépenſe de la rivière diviſée par la ſection. Ainſi la pente ſe déduira de ces données (62), & on aura $\frac{1}{B}$: ſoit tirée l'horizontale DC.

Conſidérons à préſent les deux triangles CDB, CDA, qui ont l'un & l'autre leur ſommet au point D. La hauteur CB exprime la pente naturelle de la rivière ſur la longueur DB, ou ſur CD, qui lui eſt ſenſiblement égale ; la hauteur CA exprime la pente de l'eau au deſſus de la tenue, ſur la longueur DA, ou ſur CD, qui lui eſt ſenſiblement égale ; d'où il faut conclure que $CB : CA :: B : b$, c'eſt-à-dire comme les dénominateurs des deux pentes : mais AB eſt connu, puiſque c'eſt la hauteur du remou que nons avons nommée H ; ainſi on peut faire la proportion $B - b : b :: CB - CA :: CA :: AB : CA$. Donc $CA = \frac{AB \times b}{B - b} = \frac{Hb}{B - b}$: mais DA eſt égale à $CA \times B$; ainſi on a $DA = \frac{HBb}{B - b}$, c'eſt-àdire que la tangente DA, ou la moitié de l'amplitude du remou eſt égale au produit des deux

dénominateurs des pentes par le remou, divisé par la différence des mêmes dénominateurs; & l'amplitude entière $FA = \frac{2HBb}{B-b}$; ce qu'il falloit d'abord trouver.

On demande en second lieu de déterminer la hauteur du remou, à une distance quelconque de la tenue AB. Pour cela il faut considérer que l'arc AIF appartient à un cercle dont le diamètre est presque infini par rapport à AB ou H; car nommant R le rayon, on a, par la propriété du cercle, AB : BF : : BF : AB + 2R; d'où l'on tire $2R = \frac{BF^2}{AB} - AB$, & comme AB est toujours dans la pratique très-petit par rapport à BF, il suit que AB est sensiblement égal au quarré de la tangente, divisé par deux fois le rayon de l'arc AIF. On peut faire le même raisonnement pour ID, ou pour toute autre hauteur du remou : elle sera toujours sensiblement égale au quarré de la distance du point F, divisé par 2R; c'est-à-dire que la hauteur du remou décroît comme les quarrés des distances du point où on le considère, au point F, extrémité de l'amplitude du remou.

152. Pour appliquer cette théorie à un exemple, nous prendrons les mêmes données que dans le paragraphe 149, où nous avions $l = 480^{po.}$; $h = 36^{po.}$; $\frac{1}{b} = \frac{1}{4800}$; $V = 23^{po.},45$; & la dépense $D = 405216$ pouces cubes. Nous avons trouvé la hauteur du remou, ou $H = 66^{po.},182$: la section, au dessus de la tenue, sera donc égale à $40^{pi.} \times$

Digitized by Google

$8^{pi.},515 = 340^{pi.},6064$; la paroi sera de $57^{pi.},03032$; le rayon moyen sera égal à $5^{pi.},972373 = 71^{po.},668476$; sa racine quarrée sera 8,4657, & $\sqrt{r} - 0,1 = 8,3657$; la vitesse au dessus de la tenue sera égale à $8^{po.},282$; ainsi on trouvera (62) le nombre 235,52 pour valeur de $\sqrt{B}$, & $B = 55469,6$.

La tangente à l'eau du reversoir étant égale à $\frac{HBb}{B-b}$, devient $347754^{po.},5$, & l'amplitude entière sera 695509 pouces, ou environ 9660 toises; le rayon $R = 3619248264$ pouces, ou 50267337 toises : on trouvera que le remou, au point I, est égal au quart de celui AB, ou égal à $16^{po.},545$, & on pourra le calculer pour tout autre point.

153. Examinons a présent si la supposition que nous avons faite que la courbure de la surface de l'eau, au dessus d'une tenue, étoit sensiblement un arc de cercle, remplit, du moins à-peu-près la condition de l'égalité de la dépense dans le lit de la rivière, à chaque point de l'amplitude du remou. Nous venons de voir que le remou ID, au point D, qui est le milieu de l'amplitude totale, est de 16,545, ce qui donne $52^{po.},545$ de hauteur de section à ce point. Ainsi la section y est de $25222^{po.},6$; le rayon moyen 43,109, dont la racine est 6,565; & par conséquent $\sqrt{r} - 0,1 = 6,465$. Il nous reste à trouver la pente : or, elle est la même que celle de la corde FA; c'est-à-dire qu'elle est égale à $\frac{FA}{FA}$: or, $AB = H = 66,182$; $AC = \frac{347754,5}{55469,6} = 6,269$;

Digitized by Google

AB + AC = 72,451, &, à cause de EC = CB, on a EA = AB + 2AC = 78,72. Ainsi la pente cherchée, qui répond au point I, est égale à $\frac{78,72}{695509}$ = $\frac{1}{8848}$.

Si on cherche, par la formule ordinaire du mouvement uniforme, la vitesse qui répond à cette pente & au rayon moyen que nous venons de déterminer, on la trouvera égale à 19^{po},512, qui, étant multipliée par la section 25222,6, donne une dépense de 492142 pouces cubes, au lieu de 405216 seulement, qui est celle de la rivière. Il faut donc convenir que l'hypothèse du cercle donne en même tems une amplitude de remou trop grande, une hauteur de remou trop grande au point D, & par conséquent une section trop grande au même point; mais comme la hauteur de la section ne peut pas diminuer, sans que la pente ne diminue aussi en même tems, il résulte que l'erreur occasionnée par la supposition de l'arc de cercle est assez petite.

154. En réduisant le problême à ses véritables données, qui sont 1°. la hauteur du remou AB, 2°. la tangente AD, donnée de longueur, & de position par rapport à une ligne horizontale, & 3°. la direction de la seconde tangente BDF, on peut supposer que la courbe AIF appartient ou bien à une parabole dont l'axe est horizontal, & le sommet vers le côté d'amont, ou à une hyperbole équilatère, dont une asymptote est horizontale, & le sommet tourné du même côté, ou enfin à une ellipse dont le grand axe

Digitized by Google

eſt vertical. Dans les deux premières ſuppoſitions, on trouve DF < AD, & la hauteur du remou en D eſt trop petite pour donner, en la combinant avec la pente qui réſulte de ces courbes une dépenſe conſtamment égale à celle de la rivière; mais dans l'ellipſe, en faiſant DF un peu plus petit que AD, on trouve des ſections & des pentes qui ſatisfont aſſez bien à toutes les conditions du problême.

Puiſque l'arc de cercle donne, dans les points intermédiaires du remou, une pente trop grande, il doit donner une longueur totale de remou trop étendue; ainſi la totalité du remou, ou ſon amplitude, ne peut jamais égaler le double de la première tangente AD, mais elle doit toujours la ſurpaſſer; & telles ſont les limites des plus grandes erreurs qu'on puiſſe faire à cet égard: on ne s'écarteroit donc pas beaucoup de la vérité, en prenant pour amplitude $\frac{19}{10}$ de la tangente inférieure, c'eſt-à-dire en fixant ſon extrémité ſur la tangente DF, à une diſtance du point D égale à $\frac{9}{10}$ AD; tirant enſuite une ligne droite entre les deux points extrêmes du remou, la courbure de la ſurface ne peut que garder à-peu-près le milieu de l'eſpace compris entre le milieu de cette corde & les deux tangentes. Ainſi une courbure quelconque, tangente aux deux extrémités, une ellipſe, par exemple, dont le petit axe ſeroit horizontal, donneroit, par le calcul, ou même par une opération graphique, tous les points de la courbe, ave une préciſion ſuffiſante.

Digitized by Google

Ces considérations font voir qu'il eſt plus curieux qu'utile de chercher la véritable courbe du remou : ſon équation différentielle ne peut être intégrée que par une ſérie peu convergente, & qui oblige à des calculs auſſi longs qu'inutiles.

155. De tout ce qui précède nous pouvons tirer une méthode d'approximation, pour calculer les longueurs qui ſe trouvent entre deux hauteurs de ſection connues, dans l'étendue du remou, pourvu que la différence de ces hauteurs ſoit beaucoup moindre que le remou.

Fig. 19. Supppoſons que AD, BC repréſentent deux ſections de la rivière, ſur une certaine longueur inconnue AB du remou : DC eſt le fond de la rivière, dont la dépenſe eſt connue, & AEB la courbe formée par ſa ſurface. Soient nommées P & p la grande & la petite profondeur BC & AD, a l'amplitude partielle cherchée AB, $\frac{1}{b}$ la pente de la rivière : puiſque la courbe AEB diffère très-peu d'un arc de cercle, ſi on tire la corde AB, & les deux tangentes égales AG, BG, ainſi que la ligne EF par le point G, la hauteur de ſection EF ſera la hauteur moyenne, qui répondra à la pente au point E, pour donner la dépenſe conſtante de la rivière ; & cette pente, calculée par la formule du mouvement uniforme, ſera ſenſiblement celle de la nature, & plus petite que celle de la corde AB ; car cette pente eſt un peu trop grande, comme nous l'avons vu ci-deſſus. Mais ſi on ſuppoſe la hauteur EF augmentée de la petite flèche

Digitized by Google

de l'arc AEB, c'eſt-à-dire moyenne arithmétique entre AD & BC, & qu'on cherche de même, par le moyen de la formule du mouvement uniforme (62), la pente $\frac{I}{B}$, qui conviendroit à cette ſection pour donner la dépenſe conſtante de la rivière, cette pente ſera encore un peu plus petite que la première, & que celle de la corde AB; mais elle diffèrera cependant très-peu de la vraie pente, qui convient à la vraie hauteur de ſection EF. Ainſi on aura ſenſiblement (151), & à très-peu de choſe près, AB, ou $a = \frac{(P-p)Bb}{B-b}$: cette valeur de l'amplitude partielle du remou ſera d'autant plus exacte que $P-p$ ou BK ſera plus petit; & on obtiendroit fort exactement l'amplitude entière d'un grand remou, en la calculant ainſi par parties, d'après les différentes hauteurs de ſection, priſes à volonté entre les extrêmes.

156. Dans les expériences que nous avons faites ſur les remous, nous n'obtenions que des amplitudes partielles, parce que notre canal étoit trop court pour que le remou occaſionné par le reverſoir pût s'étendre librement en amont, comme il fait dans les rivières : il étoit borné par la priſe d'eau du réſervoir, & la hauteur à ce point, ou p, étoit égale à la charge ſur la tête du canal, moins la hauteur due à la viteſſe de la ſection qui y avoit lieu. Quant à la hauteur au reverſoir, ou P, nous l'avons déduite (145) de la dépenſe, & trouvée ſenſiblement conforme à celle

Digitized by Google

de l'expérience. Ainsi, par exemple, dans la cent quatre-vingt-onzième expérience, la dépense étoit de $1112^{po.},4$ par seconde, la hauteur du reversoir ou $P = 3,055 + 4,083 = 7^{po.},138$; la hauteur près de la prise d'eau, ou $p = 4^{po.},625 - 0,344 = 4^{po.},281$. La moyenne entre ces deux hauteurs est $5^{po.},7095$, qui, multipliée par 17,25, largeur du canal, donne une section de 98,4889, & une vitesse moyenne de 11,294 : or, la pente qui convient à cette vitesse & à la section est (62) égale à $\frac{1}{2296} = \frac{1}{B}$; la pente du canal, ou $\frac{1}{b}$ étoit $\frac{1}{458}$. Ainsi la formule $a = \frac{(P-p)Bb}{B-b}$ donne $a = 1634$ pouces, ou 22 toises 3 pieds 7 pouces, qui est, à très-peu de chose près, la longueur de notre canal, comprise entre la tête & le reversoir. Il en est de même des deux autres expériences, qui donnent la longueur de 22 toises, avec encore plus de précision, quoique les données soient très-différentes.

Dans la cent quatre-vingt-douzième expérience on aura $P = 5,272$; $p = 3,666$; $\frac{1}{B} = \frac{1}{16820}$; $\frac{1}{b} = \frac{1}{929}$; $a = 21$ toises 5 pieds 4 pouces 9 lignes. Dans la cent quatre-vingt-treizième expérience on aura $P = 10,0$; $p = 6,0$; $\frac{1}{B} = \frac{1}{740}$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{258}$; $a =$ 22 toises 0 pi. 0 po.

157. Enfin, pour finir cette discussion de la hauteur & de l'amplitude des remous, la méthode pratique la plus générale & la plus commode, à laquelle il paroît qu'on doit s'en tenir, est de

Digitized by Google

chercher d'abord, par la formule du mouvement uniforme, quelle eſt l'expreſſion $\frac{1}{B}$ de la pente que la ſurface de l'eau doit avoir au deſſus d'une tenue quelconque; & nommant H la hauteur du remou, $\frac{1}{b}$ la pente naturelle du lit de la rivière, & A l'amplitude entière du remou, on fera $A = \frac{\frac{19}{10} HBb}{B - b}$. Quant aux hauteurs partielles du remou, on les fera proportionnelles aux quarrés des diſtances, à partir de l'extrémité du remou; ce qui donnera aiſément, en y ajoutant la profondeur ordinaire de la rivière, les hauteurs qui répondent à des diſtances connues, ou les diſtances qui répondent à des hauteurs connues.

158. Juſqu'ici nous n'avons examiné que la hauteur des remous occaſionnés par une vanne, au deſſus de laquelle l'eau d'une rivière reverſe; mais quand le lit, ſans être barré par une tenue, eſt ſeulement rétréci par les piles d'un pont, ou par les ailes & les bajoyers d'une écluſe ouverte, il s'y forme un remou qu'on peut aiſément déterminer d'après nos principes, en négligeant pluſieurs quantités, dont les effets ſont inſenſibles ſur une grande rivière, & qui ſe détruiſent même en partie. Voici comment on peut énoncer ce problême.

PROBLÊME.

La profondeur, la pente & la largeur du lit

Digitized by Google

d'une rivière étant données, si on construit sur cette rivière un pont ou un autre ouvrage, qui rétrécisse sa largeur d'une quantité connue, & que la longueur des piles ou des bajoyers soit aussi déterminée, on demande de quelle quantité ce pont fera hausser la surface de l'eau de la rivière dans la partie supérieure, c'est-à-dire quel sera le remou en amont du pont.

SOLUTION.

On remarquera d'abord que toute l'eau de la rivière étant forcée de passer par l'ouverture plus étroite qui reste entre les piles du pont ou les bajoyers, ne pourra le faire qu'avec une vitesse proportionnée à cette ouverture, & que cette vitesse ne peut être produite que par une charge d'eau suffisante. Cette charge est la première quantité qui fait partie du remou.

On voit ensuite que le lit de la rivière, au dessous du pont, restant le même qu'auparavant, l'eau s'y soutiendra à la même hauteur qu'avant l'établissement de ce pont : tout au plus elle pourra s'abaisser un peu à la sortie des bajoyers, avant d'avoir repris sa section ordinaire ; mais cet abaissement peut être négligé. Or, depuis la tête des piles ou des bajoyers jusqu'à leur extrémité, l'eau devant passer avec une plus grande vitesse que celle qu'elle avoit dans le lit naturel, y prendra une plus grande pente ; & cet excès de la pente

Digitized by Google

ſur cette longueur fait la ſeconde partie du remou, dont il faut trouver l'expreſſion.

Soit V la viteſſe de la rivière, avant l'établiſſement du pont, & K le rapport de la largeur naturelle du lit à la ſomme des largeurs entre les piles : ſi la longueur des piles, ou en général du rétréciſſement, n'eſt pas trés-grande, KV exprimera ſenſiblement la viteſſe ſous le pont; & ſi on ſuppoſe pour un moment la contraction nulle, la hauteur néceſſaire pour imprimer cette viteſſe ſera $\frac{K^2V^2}{2g}$; mais la rivière n'eſt pas obligée de s'élever de cette quantité, puiſqu'elle a déja une viteſſe acquiſe, dont la hauteur due eſt égale à $\frac{V^2}{2g}$; la hauteur due à l'augmentation de viteſſe ſans contraction eſt donc égale à $\frac{K^2V^2}{2g} - \frac{V^2}{2g}$: mais ſi on nomme 2G le coëfficient relatif à la contraction, qui eſt plus petit que $2g$, il faudra multiplier la hauteur qu'on vient de trouver par $\frac{2g}{2G}$, pour la ſoumettre à la contraction, & elle deviendra $\left(\frac{K^2V^2}{2g} - \frac{V^2}{2g}\right)\frac{2g}{2G} = \frac{K^2V^2}{2G} - \frac{V^2}{2G} = \frac{V^2}{2G}(K^2 - 1)$. Telle eſt donc la partie du remou néceſſaire pour produire l'augmentation de la viteſſe.

Quant à la pente ſur la longueur des piles, il eſt vrai que ſi cette longueur, ou en général celle du rétréciſſement étoit conſidérable, il faudroit la chercher par le problème (§ 185), que nous donnerons en parlant des canaux : mais dans le

Digitized by Google

cas actuel, si p est la pente naturelle du lit, ou plutôt la différence de niveau sur une longueur égale à celle des piles, avant l'établissement du pont, pour la vitesse V, K^2p exprimera sensiblement la pente nécessaire pour la vitesse KV, sur la même longueur; mais la pente étoit déja égale à p, en supposant que l'eau de la rivière au dessous du pont, conserve sa pente naturelle : ainsi l'augmentation de pente est égale à $K^2p-p=p(K^2-1)$. Donc le remou total, occasionné par ces deux causes est égal à $\left(\frac{V^2}{2G}+p\right)K^2-1$; ce qu'il falloit trouver.

159. Appliquons cette formule à un exemple, & supposons une rivière semblable à celle du paragraphe 149, à laquelle nous avons aussi appliqué la théorie des remous.

Nous avons donc $V=23^{po.},45$. Supposant une seule arche de 18 pieds de largeur, & celle de la rivière étant de 40 pieds, K devient égale à 2,222. La longueur des piles étant supposée de 30 pieds, on a $p=0,075$; & si on suppose $2G=660$, la hauteur du remou se borne à $3^{po.},47993$. On sauroit de même la quantité dont l'établissement du pont feroit gonfler les eaux, pendant les crues d'hiver, en employant les données convenables, qui se réduisent ici au changement de la vitesse, qui se trouveroit augmentée par l'accroissement de la hauteur de la section.

Si on examine les deux expériences que nous avons

faites sur un pont établi sur notre canal factice (416), on verra que la longueur des piles, non compris l'avant-bec, étoit d'environ douze pouc., la pente $\frac{1}{1857}$; $p = 0^{po.},0064$; $K = 2,1122$: & si on calcule quelle eût été dans l'une & dans l'autre la vitesse & la hauteur de section qui auroient produit, avant l'établissement du pont, la même dépense qu'après, comme cela a lieu dans une rivière, on trouvera que, relativement à la cent quatre-vingt-quatorzième expérience, la vitesse auroit été de $13^{po.},15$, avec une hauteur de section de $6^{po.},375$; & la vitesse relative à la cent quatre-vingt-quinzième expérience auroit été de $11^{po.},75$, avec une hauteur de section de $4^{po.},5208$. Ainsi les hauteurs de remou auroient dû être dans l'une de $0^{po.},9286$, & dans l'autre de $0^{po.},7459$, en supposant $2G = 660$.

Mais dans la première de ces expériences, la hauteur de l'eau à l'avant-bec des piles, étoit de 6,666; ainsi la hauteur du remou n'étoit réellement que de $0^{po.},291$; & quand même on prendroit la section à neuf pieds au dessus du pont, où sa hauteur étoit de $6^{po.},958$, le remou ne seroit encore que de $0^{po.},563$; ce qui, comme on le voit, n'est pas suffisant. Dans l'autre expérience, au contraire, la hauteur de l'eau à l'avant-bec étoit de $5^{po.},3333$; ainsi la hauteur du remou étoit de $0^{po.},8125$, qui ne surpasse la hauteur calculée que de $0^{po.},0666$, ou d'environ $\frac{3}{4}$ de ligne, qui pouvoient être l'effet du petit remou particulier, qui

a toujours lieu immédiatement contre une ſurface choquée par un courant. Ainſi la cent quatre-vingt-quinzième expérience, en confirmant nos principes, démontre que la première eſt défectueuſe, puiſqu'avec une plus grande viteſſe naturelle, tout étant égal d'ailleurs, le remou devoit y être plus grand.

Cette erreur néanmoins ne vient point de nos meſures, mais de la manière dont l'expérience a été faite. En effet, ſur 100 pieds de diſtance depuis la priſe d'eau juſqu'au pont, le canal n'avoit alors que $0^{po.},646$ de pente; & la charge à la tête du canal étant de $6^{po.},75$, la ſurface du réſervoir étoit élevée de $7^{po.},396$ au deſſus du radier du pont. D'un autre côté, on voit que ſi la ſection naturelle du lit, qui eſt de $6^{po.},375$, ſe fût exhauſſée de $0^{po.},9286$, il n'y auroit eu à la ſurface qu'une pente de $0^{po.},0924$ ſur 100 pieds, ou de $\frac{1}{13043}$, qui n'auroit pas été ſuffiſante pour produire la dépenſe que nous avons trouvée. Ainſi l'eau a été obligée d'acquérir de la pente, en approchant du pont, aux dépens du remou ſenſible, & de régler ſes hauteurs, pour produire la plus grande dépenſe. Cet inconvénient n'avoit pas lieu dans l'autre expérience, parce que la priſe d'eau étoit à proportion plus élevée, relativement à la hauteur de ſection uniforme; & ce cas n'arriveroit jamais dans une rivière qui ne gêne en aucune manière l'étendue du remou.

160. Si on ſuppoſe les obſtacles détruits, ou que

Digitized by Google

le lit reprenne ſon état naturel, on trouve $K = 1$, ce qui rend le remou nul.

Si la longueur des piles, ou en général du rétréciſſement, devenoit très-petite, la pente ſur cette longueur deviendroit comme nulle; mais la contraction augmenteroit, c'eſt-à-dire que 2G deviendroit plus petit, ce qui augmenteroit l'expreſſion du remou.

Si au contraire le rétréciſſement devenoit très-long, la pente ſur la longueur deviendroit conſidérable, & le remou en amont plus ſenſible.

Enfin, ſi le rétréciſſement devenoit d'une longueur infinie, le problême, ſans changer de nature, devroit s'énoncer ainſi : la largeur, la profondeur & la pente d'une rivière, & ſa dépenſe par conſéquent étant données; déterminer quelle ſeroit ſa profondeur, ſi on rétréciſſoit ſon lit d'une quantité connue, & la chute qui répondroit à ſa nouvelle viteſſe, à l'entrée de ſon lit rétréci. Ce problême ſe rapporte naturellement aux canaux dont nous parlerons bientôt.

CHAPITRE IV.

Suite du même ſujet. Réflexions ſur la manière de rendre navigables les rivières de moyenne grandeur.

161. CE que nous venons d'établir dans le chapitre précedent, au ſujet du remou qu'occaſionnent les

Digitized by Google

éclufes, eft très-propre à fournir des règles sûres pour fixer la diftance où elles doivent être placées les unes des autres, relativement à la profondeur d'eau qui refte aux rivières dans le tems des fécherefles, & à celle qu'on aura jugée néceffaire pour le tirant de l'eau des bateaux, bélandres ou autres vaiffeaux de tranfport en ufage dans chaque province.

En effet, fi on fuppofe connues la pente, la largeur & la profondeur d'une rivière, dans le tems des fécherefles, & qu'on ait d'ailleurs fixé la hauteur des portes tournantes, des vannes ou des tenues de poutrelles, dont on veut faire ufage pour foutenir fes eaux, dès-lors les emplacemens des éclufes ne peuvent plus être fixés arbitrairement, fi l'on veut conferver dans tous les points une profondeur d'eau fuffifante pour la fûreté & la commodité de la navigation. Entrons dans le détail.

Il y a des exemples de rivières qui ne font rendues navigables que par de fimples tenues de vannes ou de poutrelles, au deffus defquelles il fe forme, par l'effet du remou, un magafin d'eau, qui, venant à être lâché par l'ouverture de la tenue, remplit le lit inférieur, & élève fes eaux d'une quantité fuffifante pour le tirant de l'eau des bateaux qu'on fait paffer à la faveur de ces éclufes : mais quand, après cette accrue momentanée, on referme ces tenues, l'eau baiffe dans ce lit inférieur, & ne conferve pas affez d'eau pour y tenir à flot ces mêmes bateaux, qui font obligés

Digitized by Google

d'aller chercher une profondeur d'eau suffisante, dans le voisinage d'une tenue inférieure, qui forme un nouveau remou. Cette manière assez grossière de rendre les rivières navigables est trop imparfaite, & présente trop d'inconvéniens pour être donnée pour modèle. Il est probable que l'on ne s'y est pris de cette façon que faute de connoître l'usage & les avantages des sas, dont la découverte n'est pas fort ancienne.

Quand donc une navigation doit être vive & animée, il faut que les bateaux puissent monter & descendre tous les jours & à toute heure, sans jamais courir le risque de manquer d'eau, ce qui ne peut se faire qu'au moyen des sas, ou du moins des bassins formés par deux écluses voisines, qui font l'effet d'un sas. Le seul inconvénient auquel on ne peut parer dans la navigation de ces sortes de rivières, est celui des accrues de l'hiver, qui mettent quelquefois dans le cas d'interrompre la navigation, à cause de la trop grande rapidité du courant au passage des écluses, quand on n'a pas eu soin de se procurer des décharges d'une largeur suffisante, à côté du passage principal. Nous supposerons donc que, dans la vue de rendre navigable une rivière de moyenne grandeur, on se détermine à placer de distance en distance des sas ou des bassins destinés à soutenir ses eaux, & à racheter la chute de ces tenues, de manière que la moindre profondeur du lit, qui se trouve au dessous d'une tenue, soit égale à un tirant d'eau déterminé.

Digitized by Google

162. Soit, comme ci-devant (149), une rivière dont la profondeur, dans le tems des sécheresses, soit de 3 pieds, la largeur de 40 pieds, la pente $\frac{1}{4800}$, & qu'on ait par conséquent $V = 23^{po.},45$, & $D = 405216$ pouces cubes; on supposera aussi qu'on ait fixé la hauteur de la vanne ou de la porte tournante à 6 pieds, & la largeur du passage à 18: on demande à quelle distance il faut placer les écluses, pour qu'il n'y ait nulle part moins de 5 pieds de profondeur.

Après avoir cherché la hauteur de la nappe d'eau qui reversera par dessus les vannes, & avoir déterminé la hauteur du remou (149) & son amplitude (157), on considérera que, puisque la rivière a une profondeur moyenne uniforme de 3 pieds, il ne lui manque que deux pieds de profondeur de plus, pour qu'il s'y trouve cinq pieds d'eau, comme on le demande : ainsi la question se réduit à déterminer à quelle distance de la tenue le remou se trouvera être de deux pieds. Or, le remou total étant de $66^{po.},182$, sur une amplitude de 660733 pouces, ou de presque 9177 toises, on fera la proportion $66^{po.},182 : 24^{po.} :: 9177^{2}$: un quatrième terme, qui est 30540266, dont la racine quarrée $5526^{to.},32$, ôtée de 9177 toises, il reste $3650^{to.},68$ pour l'intervalle qui doit se trouver d'une tenue à l'autre.

163. Mais il pourroit se faire que des raisons de convenance fissent desirer de placer les écluses à des distances moindres ou plus grandes que celle

Digitized by Google

qu'on auroit fixée d'abord : dans ce cas il faudroit diminuer ou augmenter la hauteur des tenues, suivant la proportion convenable. Or, pour fixer cette hauteur il faut distinguer si la distance qu'on veut mettre entre les tenues est plus petite ou plus grande que celle qu'on vient de trouver, & qui n'est relative qu'à une vanne de 6 pieds de hauteur; si elle est plus petite, on trouvera la hauteur de la tenue nécessaire, par une simple règle de trois. Supposons, par exemple, que le remou IR soit de 24 pouces, & son amplitude AR de $5526^{to.},32$, comme on vient de le trouver, mais qu'au lieu de faire $RF = 3650^{to.},68$, on ne veuille mettre que 2000 toises de distance de la tenue R à la tenue N, on aura $AR^2 : (AR + RN)^2 :: IR : NS$; & si on ajoute à ce quatrième terme la profondeur SO de la rivière, on aura la profondeur totale NO en amont de l'écluse; d'où il faut déduire la hauteur connue de la nappe d'eau; il restera la hauteur de la vanne ou de la tenue qu'il faut faire au point N, qui sera d'environ $50^{po.},326$. Fig. 20.

Si au contraire on vouloit mettre entre les deux tenues une distance RL plus grande que RF, & égale à 5000 toises, on ne pourroit plus calculer la hauteur LD du remou au point L, avec une exactitude suffisante, par le rapport des quarrés des amplitudes, à partir du point A, parce que le point L doit se trouver constamment plus bas que F, à quelque éloignement qu'on le suppose; ce qui répugne à la loi supposée. Ainsi, comme la

Digitized by Google

pente de F en L ſera toujours très-petite, on peut ſuppoſer la ſurface de l'eau en L de niveau au point F; & d'après cette ſuppoſition, on ſe contenteroit d'ajouter à la hauteur FE la pente du lit ſur la longueur FL, ce qui donneroit la hauteur LC un peu trop grande. Dans notre exemple RF étant égal à $3650^{to.},68$, & RL étant donné égal à 5000 toiſes, FL devient égal à $1349^{to.},32$: & la pente naturelle du lit ſur cette longueur eſt égale à $\frac{1}{4800} \times 1349^{to.},32$, ou à $0^{to.},2811 = 20^{po.},239$, qui, ajoutés à $EF = 102^{po.},182$, donnent $LC = 122^{po.},42$ environ, & la hauteur de la tenue égale à $92^{po.},239$.

Si on ne vouloit pas s'en tenir à cette approximation, on pourroit recommencer un nouveau calcul, en ſuppoſant la hauteur de la tenue LC plus grande que celle qu'on vient de trouver en dernier lieu, égale, ſi l'on veut, à 100 pouces, & chercher la hauteur de la nappe d'eau, le remou entier & ſon amplitude totale; placer dans cette amplitude le lieu R, où le lit ſe trouveroit avoir 5 pieds de profondeur, c'eſt-à-dire le tirant d'eau donné; & enfin, par la diſtance déterminée RN d'une tenue à l'autre, fixer la hauteur cherchée de la tenue NO, qui ſe trouveroit par ce moyen au deſſus de la première tenue ſuppoſée, & où le remou ſeroit par conſéquent proportionnel, du moins ſenſiblement, au quarré des amplitudes comptées depuis l'origine du remou A.

164. C'eſt d'après ces principes, & en uſant

Digitized by Google

de quelque méthode d'approximation qui y soit puisée, qu'on réglera avec précision les ouvrages nécessaires, pour rendre navigables de petites rivières, que le peu d'abondance de leurs eaux rend incapables de porter bateau en tout tems; mais il faut s'être assuré auparavant de l'exactitude du régime de ces rivières; c'est à-dire qu'elles ont établi leur lit, de manière à ne plus creuser ni élargir leur section actuelle, ni changer la pente de leurs eaux, sans quoi on tomberoit dans de grands inconvéniens pour l'avenir.

165. Je dis qu'il faut s'assurer de l'exactitude du régime d'une rivière, avant de fixer les hauteurs des radiers & l'élévation des tenues qu'on y veut faire de distance en distance; & ce n'est pas sans raison : car, comme ces écluses doivent nécessairement être ouvertes de fond, dans le tems des crues, pour procurer à l'eau toute la vitesse qui peut répondre à la pente & à la capacité de son lit, le régime ne manquera pas de s'y établir à la longue, autant que l'obstacle des écluses le lui permettra; c'est-à-dire que la pente & la figure du lit, dans l'intervalle d'une écluse à l'autre, se conformeront à la mesure qui conviendra le mieux à la dépense & à la ténacité du terrain. Il est vrai que la pente générale paroît être fixée par les radiers qu'on établit à chaque passage d'écluse, & que la largeur de ce passage semble borner, à un certain point, la figure de la section; mais cela n'empêche pas que, dans l'intervalle des écluses, la

Digitized by Google

pente ne ſoit indépendante des radiers, & la ſection très-différente des ouvertures de paſſage, tellement qu'après un nombre d'années il pourroit arriver que la profondeur de la rivière & le remou des écluſes devinſſent beaucoup moindres qu'ils n'étoient lors de l'établiſſement, & que, faute d'avoir prévu ces changemens, auſſi aſſurés qu'ils ſont lents à s'opérer, la navigation devînt très-incommode, & même tout-à-fait impraticable. On ſeroit alors forcé d'augmenter la hauteur des tenues, & de relever les berges de la rivière, en y faiſant des digues, pour la contenir dans ſon lit; ce qui pourroit cauſer de grands préjudices aux riverains, & nuire à l'écoulement des eaux du pays, par l'exhauſſement du niveau de la rivière en amont de chaque tenue.

Pour prévenir de pareils inconvéniens, & rendre le plus durable qu'il eſt poſſible l'avantage des ouvrages qu'on n'exécute jamais dans ce genre ſans de grandes dépenſes, il faut d'avance étudier avec ſoin quelle eſt la viteſſe de régime qui convient au terrain dans lequel eſt creuſé le lit de la rivière qu'on projette de rendre navigable. Si cette viteſſe n'eſt pas beaucoup moindre que celle de la rivière groſſie par les crues, le régime ſera preſque exact, & il n'y aura pas de grands changemens à faire à la largeur du lit; mais ſi la viteſſe naturelle de la rivière, dans ſes hautes eaux, ſurpaſſe de beaucoup celle qui convient au régime, il deviendra néceſſaire d'élargir le lit, pour faire baiſſer la

Digitized by Google

ſection, & procurer par là la diminution de cette viteſſe. Ainſi, connoiſſant la dépenſe dans le tems des crues, on la diviſera par la viteſſe de régime, ou ſi l'on veut, par une viteſſe un peu plus grande, pour une raiſon que nous dirons tout à-l'heure; le quotient ſera l'aire de la ſection : prenant enſuite la pente naturelle de la rivière pour la pente conſtante qu'elle conſervera toujours après l'établiſſement des radiers des écluſes, on cherchera le rayon moyen, & enſuite les dimenſions du lit. Enfin, les dimenſions du lit & la dépenſe, dans le tems des ſéchereſſes étant connues, on calculera les hauteurs & les diſtances des tenues, d'après des largeurs de paſſage convenables. On voit que ce problême hydraulique, conſidéré dans toute ſon étendue, renferme beaucoup de calculs. Nous pourrions nous borner aux règles générales que nous venons d'établir, mais un exemple en rendra l'application plus ſenſible; & nous entrons d'autant plus volontiers dans ce détail, qu'il nous fournit une occaſion de montrer à la fois l'uſage de pluſieurs méthodes, que nous n'avons juſqu'ici qu'indiquées ſéparément

Exemple de la manière de rendre navigable une rivière dont le lit n'a pas encore de ſtabilité.

166. Suppoſons une petite rivière peu éloignée de ſa ſource, dont la pente actuelle ſoit de 2 pouc. pour 100 toiſes, dont la profondeur, dans le tems

Digitized by Google

des sécheresses de l'automne, ne soit que de deux pieds, mais qui soit sujette à des crues qui fassent monter ses eaux jusqu'à 9 pieds de hauteur, dans un lit dont la largeur par le bas soit de 18 pieds, & les taluds dans la proportion de 4 parties de base sur 3 de hauteur; on propose de rendre cette rivière navigable en tout tems, au moyen de plusieurs écluses ou sas placés de distance en distance, & de donner de la stabilité à son lit, dans un terrain dont la vitesse de régime est de 24 pouces par seconde.

Ce lit ayant les mêmes propriétés qu'un lit rectangulaire, on a $\frac{r}{b} = \frac{1}{3600}$, la largeur, dans le tems des crues, ou $l = 30$ pi. $= 360$ pouces, la profondeur ou $h = 9$ pi. $= 108$ pouces, $\frac{lh}{l+2h}$ ou $r = 5^{pi.},625 = 61^{po.},88$. Ainsi la vitesse réelle, dans le tems des crues, sera égale à $38^{po.},9447$, & la dépense à $1514169^{po.},936$ par seconde : or, si l'on fait attention que la vitesse qui convient au régime n'étant que de 24 pouces, la vitesse réelle est de près de 39, on verra que le lit naturel ne peut avoir de stabilité. Il y a deux moyens de lui en procurer; l'un en diminuant sa pente, & l'autre en augmentant sa largeur aux dépens de sa profondeur. Le premier n'est pas praticable, comme nous l'avons vu ci-devant (135) : il faut donc se contenter du second, qui paroît d'autant plus convenable, qu'il faudroit, pour la seule commodité du passage des bâteaux, élargir le lit déja trop étroit, pour en

Digitized by Google

contenir deux qui viendroient à se croiser. Tenons-nous en là, & cherchons les nouvelles dimensions qui peuvent convenir au lit, pour lui procurer de la stabilité, sans changer sa pente.

La vitesse exacte du régime étant de 24 pouces, on peut observer que cette vitesse n'ayant lieu que dans les crues d'hiver, le lit seroit sujet à se combler dans les accrues moindres, & pendant tout le reste de l'année, où la vitesse seroit extrêmement diminuée, à raison de la diminution de la dépense & de la retenue des écluses. Ainsi, il paroît convenable de prendre pour base une vitesse un peu plus grande, afin que les crues de l'hiver puissent emporter les dépôts formés pendant le lit le reste de l'année, qui tendroient à le relever.

Nous supposerons donc la vitesse moyenne de régime, augmentée jusqu'à 27 pouces, au lieu de 24, & c'est d'après cette vitesse qu'il faut chercher les dimensions du lit; l'équation du mouvement uniforme devient donc $V = 27^{po.} = \frac{297(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}} - 0,3(\sqrt{r}-0,1)$, dans laquelle le diviseur $\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6}$ est égal à 55,884; ainsi on a (62) $\sqrt{r}-0,1 = \frac{27^{po.}}{\frac{297-0,3}{55,884}} = 5^{po.},3843$, & par conséquent $\sqrt{r} = 5,4843$; & $r = 30^{po.},0775$: ce rayon moyen étant déterminé, & la section, qu'on peut nommer S, étant égale à la dépense $1514169^{po.},936$, divisée par la vitesse 27 po., c'est-à-dire à $56080^{po.},368$, on trouvera (62) la largeur du lit,

Digitized by Google

par la formule $l = \sqrt{\left(\frac{S}{2r}\right)^2 - 2S} + \frac{S}{2r} =$ $1802^{po.},296$, & par conséquent $h = 31^{po.},115$.

167. Les dimensions de la section étant trouvées, on est assuré que ce lit aura de la stabilité, & qu'en même tems que les radiers d'écluse qu'on y doit construire suivant la pente naturelle, empêcheront qu'il ne se creuse, il ne pourra pas non plus s'élargir ni s'approfondir dans l'intervalle d'une écluse à l'autre. Si la lenteur du courant permet pendant un tems au dépôt de se rasseoir sur le fond & vers les bords, la vitesse des eaux livrées à toute leur pente pendant les accrues, où toutes les écluses resteront ouvertes, nettoiera en peu de tems le lit, & des éclusiers intelligens régleront la remise des écluses au printems sur les besoins momentanés du lit. Il faut donc songer à présent à disposer les écluses nécessaires à la navigation, puisqu'elles sont destinées à soutenir, dans le lit de la rivière, une profondeur d'eau suffisante à l'espèce des bateaux qu'on compte y employer. Nous supposerons cette profondeur de 4 pieds; mais il faut savoir avant tout à quelle hauteur les basses eaux de l'été se soutiendront dans le nouveau lit. Nous avons supposé qu'il ne restoit alors que 2 pieds de profondeur d'eau dans le lit naturel, dont la section par conséquent est réduite dans ce cas à 20 pieds 8 pouces réduits de largeur sur 2 pieds de hauteur, ou à 5952 pouces quarrés. La vitesse qui répond à ces dimensions & à la pente $\frac{1}{3600}$ est, suivant la

Digitized by Google

formule, de 21po.,984, & la dépenſe eſt de 130848po.,768 par ſeconde.

Pour trouver la profondeur de l'eau, qui répondroit, dans le nouveau lit, à cette dépenſe & à la pente conſtante $\frac{1}{3600}$, on ſe ſervira de la méthode (124 & 125) d'approximation; faiſant attention que D eſt ici égal à 130848,768 pouces cubes, & que la largeur du fond du lit eſt égale à 1760po.,81, on trouvera cette profondeur d'environ 6po.,3; ainſi, pour obtenir une profondeur de 4 pieds, il faudra un remou de 41po.,7.

D'après toutes ces données, & après qu'on aura fixé la largeur du paſſage principal, par lequel ſe fera le reverſement & la hauteur de la tenue, on calculera, par le problême 148, la hauteur du remou en amont de chaque teuue; enſuite (157) l'amplitude entière de ce remou, & la diſtance d'une tenue à l'autre, pour que le remou ait 41po.,7 de hauteur à la tenue ſupérieure. Nous n'entrons pas là-deſſus dans un plus grand détail; ce ne ſeroit qu'une répétition de ce que nous avons dit dans le chapitre précédent: nous nous contenterons d'ajouter ici quelques réflexions générales ſur ce diſpoſitif.

168. On auroit pu rendre la rivière navigable pour quelque tems, en laiſſant ſubſiſter l'ancien lit, ou du moins ne l'élargiſſant qu'autant que la commodité de la navigation le demande, ſans s'embarraſſer de la ſtabilité qui oblige à un élargiſſement conſidérable. Par là, les tenues étant plus

Digitized by Google

éloignées les unes des autres, il en auroit fallu un moindre nombre, & la dépense se seroit trouvée doublement diminuée ; mais il en est ici comme dans bien d'autres cas, où l'économie mal-entendue est une véritable ruine : car, pour peu qu'on y réfléchisse, on sentira aisément, 1°. qu'il n'est pas possible que le lit conserve ses premières dimensions, puisque la vitesse de la rivière, dans ses crues, est beaucoup au dessus de celle du régime ; 2°. que conséquemment si on espace les écluses d'après l'état du lit naturel de la rivière, peu d'années s'écouleront sans que la navigation devienne impraticable, par le manque de profondeur d'eau en dessous de chaque écluse, comme il est aisé de s'en convaincre, en calculant la pente à laquelle le lit se réduiroit, pour n'avoir que la vitesse du régime dans sa section naturelle entre deux tenues. 3°. Si, pour remédier à ce défaut, on exhausse les tenues, afin d'augmenter le remou, & de soutenir assez de hauteur d'eau sur les radiers inférieurs, on sera forcé aussi de relever les digues, & on noiera le pays, en le privant de la décharge naturelle de ses eaux. 4°. Enfin, le mal augmentant tous les ans, & devenant extrême, le cri public, qu'on n'entend jamais que trop tard, & qui souvent suit les malheurs au lieu de les précéder & de les prévoir, obligera à construire des écluses intermédiaires, qui se trouveront forcément trop voisines les unes des autres : par-là on multipliera mal à-propos les frais de construction, d'entretien

&

Digitized by Google

& de péages des écluſes, les gages des écluſiers, les engorgemens dans les débacles de l'hiver. Il eſt donc beaucoup plus ſage, pour éviter ces doubles frais, & prévenir les déſordres qu'une rivière, abandonnée à une pente trop grande, ne manqueroit pas d'occaſionner, avant d'avoir elle-même élargi ſon lit, de diſpoſer tout-d'un coup ce lit, & les écluſes les plus néceſſaires, d'une manière ſtable, & qui puiſſe en aſſurer la durée.

Nous avons au reſte choiſi pour exemple une rivière où la pente eſt forcée, & qui ſe trouve d'ailleurs dans les circonſtances les moins favorables à l'établiſſement d'une navigation. Il eſt bon d'en uſer ainſi, pour rendre plus ſenſibles les réſultats, & montrer les cas extrêmes qu'on ne rencontre preſque jamais dans la pratique, mais qu'il faut que l'art ſache maîtriſer au beſoin.

169. Je finirai ce chapitre, en propoſant un moyen de rémédier à l'envaſement qui a lieu en avant des portes tournantes des écluſes, lorſque les rivières qu'on veut rendre navigables, ſont ſujettes à charier du limon ou du ſable fin, dans le tems de leurs crues : le dépôt de ce limon s'oppoſe à l'ouverture des portes, & jette dans de grands embarras pour leur manœuvre. De quelque manière qu'on rende une rivière navigable, ſoit par des ſas & des baſſins, il faut néceſſairement qu'avant de faire paſſer les bateaux, on ouvre des vannes ou des ventelles, pour faire paſſer l'eau dans le lit inférieur ou dans le ſas, afin d'élever

Digitized by Google

le niveau de l'eau en aval, & racheter la chute de l'écluse, d'une manière qui permette aux bateaux la descente du bassin supérieur dans le bassin inférieur. Or, on peut mettre à profit la dépense d'eau, qui se fait alors avec une grande chute, pour nettoyer le devant des portes, en la faisant passer par des aqueducs ou pertuis de 2 pieds de largeur sur 3 de hauteur, pratiqués sur un plan demi-circulaire, dans l'épaisseur des bajoyers, & disposés de manière que leur entrée soit contiguë au poteau tournant de chaque porte; afin qu'en ouvrant ces pertuis, avant d'ouvrir les portes, le courant se détermine le long de chaque vanteau avec violence, & emporte tout ce qui pourroit s'être déposé en avant, & en gêner le mouvement. On a vu par expérience que, faute de cette précaution, l'ouverture des portes tournantes devient très-difficile, leur partie inférieure traîne & laboure dans la vase, leurs assemblages fatiguent considérablement, & le retard qu'éprouve la manœvre peut causer de grands accidens.

CHAPITRE V.

Des canaux en général. Chute qui se forme à leur entrée. Moyens de l'empêcher.

170. LA théorie des canaux n'est pas dans la pratique d'une moindre utilité que celle des rivières,

Digitized by Google

& quoiqu'elle porte ſur la même baſe, qui eſt la loi du mouvement uniforme, elle diffère cependant de celle-ci par la variété des applications, & des objets auxquels nous faiſons ſervir les canaux. Nous ne parlerons ici que de ceux dans leſquels l'eau eſt courante, parce qu'ils dépendent directement de l'hydraulique, & préſentent pluſieurs difficultés qui ne ſe rencontrent pas dans les canaux où l'eau eſt de niveau & ſans mouvement, & n'a beſoin que d'être ſoutenue par des écluſes, & nourrie par quelque ruiſſeau qui ne ſoit point ſujet à ſe troubler, & à former des dépôts de limon. Les rivières ſont l'ouvrage de la nature, les canaux ſont l'ouvrage de l'homme; l'art ne peut qu'ajouter ou corriger quelque choſe dans celles-là; dans ceux-ci il faut tout imaginer, tout exécuter, prévoir les inconvéniens, calculer les avantages, & proportionner la dépenſe, qui eſt toujours conſidérable & certaine, au profit & à l'utilité publique, qui ſont toujours douteux dans la ſpéculation, pour la plupart des contribuables. On pourroit donc dire qu'il faut plus d'induſtrie & de ſcience pour diſpoſer convenablement le projet d'un canal de dérivation, de deſſéchement ou de navigation, que pour rémédier aux déſordres d'une rivière, ou pour en tirer quelque ſervice.

171. Un canal diffère eſſentiellement d'une rivière par ſon origine : celle des rivières eſt peu de choſe, mais ſur une grande longueur de cours elles reçoivent des accroiſſemens inſenſibles; leur

Digitized by Google

dépense est indépendante de leur pente actuelle ; car, au défaut de la pente, leur section augmente. Dans les canaux au contraire l'origine fixe principalement leur dépense ; ils partent d'un bassin ou d'un réservoir quelconque, dans lequel l'eau étant en repos, est obligée de passer assez rapidement à un mouvement, irrégulier d'abord, mais bientôt uniforme, & proportionné à l'entrée du canal & à sa pente. Dans ce dernier état un canal semble différer fort peu d'une rivière ; mais pour peu qu'on altère sa pente ou sa section, la dépense varie aussitôt, parce qu'elle est dépendante de la prise d'eau de son entrée.

Pour que l'eau puisse couler dans un tuyau incliné avec une vitesse uniforme, il est nécessaire qu'il se trouve à la tête de ce tuyau une charge d'eau contenue dans le réservoir, & capable d'imprimer à l'eau la première vitesse, qu'elle doit ensuite conserver uniformément dans toute la longueur du tuyau, à raison de son diamètre & de sa pente : sans cette charge, l'eau seroit hors d'état de couler dès son entrée avec la vitesse convenable, au lieu que cette vitesse, une fois imprimée par la charge, se conserve ensuite sans altération, par l'effet de la force accélératrice, ou de la pente, qui détruit à chaque instant l'effet de la résistance, ou du frottement du tuyau. Il en est de même d'un canal qui tire son origine d'un bassin, d'un lac, ou même d'une rivière, par une ouverture égale à la largeur constante de son lit inférieur. Il

Digitized by Google

eſt indiſpenſable, dans ce cas, que l'eau forme une chute, à ſon départ du lac, laquelle chute engendre une viteſſe égale à celle que le courant inférieur aura, en vertu de ſa pente & des dimenſions de ſon lit.

S'il n'y avoit aucune contraction d'orifice à l'entrée d'un tuyau ou d'un canal, & qu'on nommât V la viteſſe moyenne & uniforme qui doit s'y établir inférieurement, la chute, à ſon entrée, ſeroit égale à $\frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{724}$; mais s'il y a une contraction d'orifice quelconque, & qu'on nomme G la gravité diminuée qui repréſente la perte cauſée par cette contraction, la chute dont nous parlons ſera exprimée par $\frac{V^2}{2G}$. Or, il eſt évident que cette chute ne peut ſe former qu'aux dépens de la profondeur du canal, dont la ſurface reſte abaiſſée de de cette quantité au deſſous du niveau du réſervoir d'où il part. Avant d'entrer dans un plus grand détail ſur la dépenſe & la viteſſe des canaux, examinons d'abord quel pourroit être le moyen de conſerver au canal une profondeur d'eau égale à la hauteur du réſervoir, c'eſt-à-dire à la hauteur dont l'eau du baſſin eſt élevée au deſſus du fond du canal, à ſa priſe d'eau.

172. Quand l'eau ſe met en mouvement pour couler dans le lit d'un canal qui a une pente exprimée par $\frac{1}{b}$, & pour acquérir une viteſſe finale V, ſi elle n'éprouvoit point de réſiſtance dans ſon

Digitized by Google

lit, c'eſt-à-dire, ſi elle pouvoit accélérer ſon mouvement, à la manière des corps qui gliſſent ſans frottement ſur un plan incliné, & qu'elle trouvât à chaque inſtant des largeurs de lit proportionnelles à ſes viteſſes inverſes, l'eſpace qu'elle parcourroit pour acquérir la viteſſe V, ſeroit exprimé par le produit de la chute due à la viteſſe multipliée par le dénominateur de la pente : car, pour que l'eau tombe de la hauteur $\frac{V^2}{2g}$, en parcourant un lit dont la pente eſt $\frac{1}{b}$, il faut qu'on ait $1 : b :: \frac{V^2}{2g}$: un quatrième terme, qui eſt égal à $\frac{V^2 b}{2g}$. Dans ce cas, la quantité $2g$ ſeroit toujours égale à 724, parce que la contraction d'orifice ſeroit nulle; & ſi on imagine une parabole dont le ſommet ſoit à la priſe d'eau, dont l'abciſſe ſoit égale à $\frac{V^2 b}{724}$, & dont l'ordonnée correſpondante à cette abciſſe ſoit égale à V, il eſt évident que toutes les autres ordonnées intermédiaires repréſenteront les viteſſes de l'eau correſpondantes à chaque abciſſe. Ainſi il ſuffiroit de faire, à chacun des points de la longueur $\frac{V^2 b}{724}$, les largeurs du canal proportionnelles à l'inverſe des ordonnées. Par ce moyen l'entrée du canal s'évaſeroit vers la priſe d'eau, & auroit la forme d'une embouchure ou d'une cloche; & la largeur, qu'on peut nommer l, ne commenceroit à être uniforme qu'à une diſtance de la priſe d'eau égale à $\frac{V^2 b}{724}$. Pour trouver donc la largeur du canal à un

Digitized by Google

point quelconque, dont la distance, à la prise d'eau, seroit nommée E, on feroit la proportion $\sqrt{E} : \sqrt{\frac{V^2 b}{724}} :: l$: quatrième terme, qui est $l\sqrt{\frac{\frac{V^2 b}{724}}{\sqrt{E}}} = \frac{l}{\sqrt{E}}\sqrt{\frac{V^2 b}{724}}$.

Il suit de là qu'en supposant toujours nulle la résistance du lit, un canal évasé, d'après ces principes, n'auroit ni chute ni contraction à son entrée, & la surface de ses eaux conserveroit la même pente que le fond du lit, auquel elle seroit parallèle. Tenons-nous en à ce raisonnement & à cette disposition, sans entrer dans la recherche de l'altération que la résistance du lit devroit occasionner à la courbe qui termine chaque côté de l'évasement que nous proposons. Il est vrai, & nous en convenons, que cette résistance empêchera les vîtesses de croître aussi vîte que nous le supposons, surtout en approchant de l'uniformité; & qu'ainsi la longueur de cette embouchure devroit, à la rigueur, être beaucoup plus grande; mais il est vrai aussi que c'est principalement à l'origine du mouvement que les largeurs du canal doivent varier davantage, & que le commencement du mouvement diffère alors fort peu du mouvement uniformément accéléré. D'ailleurs, en proposant aux praticiens de faire l'évasement plus long que celui que nous venons de déterminer, nous perdrions nos peines, à cause de la dépense du déblai d'une entrée déja fort élargie, & de la sujétion d'une

Digitized by Google

courbure, toujours difficile à tracer, d'après des formules très-compliquées : il ne feroit pas même poſſible, dans la pratique, de faire l'entrée auſſi large que l'exigeroit la formule précédente, puiſqu'elle deviendroit infinie à la priſe d'eau; mais on devra ſe contenter de lui donner la plus grande largeur poſſible, ſuivant les circonſtances locales; & il ſuffit d'avoir montré qu'on peut faire évanouir preſque entièrement la chute & la contraction qui ont lieu à l'entrée d'un canal.

173. Nous croyons donc que la figure évaſée, telle à-peu-près que nous venons de la déterminer, eſt celle qui convient le mieux à l'embouchure des canaux, & qu'il en doit réſulter pluſieurs avantages, dont voici les principaux. 1°. L'eau ne formant point de chute à leur entrée, & gardant une pente uniforme à cet endroit, comme au deſſous, où le cours régulier eſt établi, elle ne perdra rien de ſa profondeur ni de ſa viteſſe, & la dépenſe du canal ſera la plus grande poſſible, relativement à ſes dimenſions. 2°. Si cette entrée n'eſt pas revêtue de quais de maçonnerie, & qu'elle ne ſoit qu'en terre, l'eau ne fera point d'effort pour ronger les rives, ni pour creuſer le lit, comme elle a coutume de faire, quand l'entrée du canal n'a pas plus d'ouverture que le reſte du lit. 3°. Si le canal doit être fréquenté par des bateaux, l'entrée n'en ſera point dangereuſe, ni difficile à paſſer, comme le ſont celles qui ſont reſſerrées; car l'eau formant dans celles-ci une

Digitized by Google

chute aſſez rapide, & le volume du bateau diminuant encore l'ouverture, il ſe forme à l'arrière un poids d'eau qui occaſionne un mouvement rapide, qui, dans certaines circonſtances, peut devenir dangereux.

174. En réfléchiſſant ſur cette diſpoſition de l'entrée des canaux, il eſt aiſé de ſentir qu'elle eſt puiſée dans la nature, & que c'eſt mal à-propos qu'on néglige de lui donner cette figure. On peut obſerver que tout ruiſſeau qui ſort ſans gêne d'un étang, toute rivière qui part d'un lac, toute eau enfin qui, au départ d'un baſſin, paſſe du repos au mouvement, affecte d'élargir elle-même l'entrée de ſon canal, & de lui donner la forme évaſée que nous venons de déterminer, à moins que ſes rives ne ſoient pas de nature à être rongées. On remarque au contraire au paſſage des écluſes, des ponts & des entrées des canaux faites en maçonnerie & reſſerrées, que la contraction jointe à la chute néceſſaire pour engendrer la viteſſe, donne lieu, de chaque côté, à un courant rapide; formant chute, & d'une direction oblique & convergente; il ſe forme un vide à la tête de chaque bajoyer, contre la face qui forme le paſſage, & ce vide eſt plus conſidérable ſi la tête du bajoyer eſt directe & perpendiculaire à cette face : or, le courant de l'eau qui paſſe contre cet angle, eſt conſidérablement plus rapide que celui qui s'établit plus bas le long des rives; & ſi, dans le cours ordinaire de l'eau de ce canal, le régime ſe trouve exact,

Digitized by Google

comment le pourroit il être à l'entrée ? L'accélération de la vitesse tend donc à miner peu-à-peu chaque angle de l'entrée du canal, aussi long-tems qu'ils lui résistent, & jusqu'à ce que la chute & la contraction soient anéanties. Il est donc de la nature de la chose, & conséquemment très-avantageux de prévenir le vœu de la nature, en se conformant d'avance à la disposition à laquelle elle tend.

175. Ce cas, au reste, n'est pas le seul auquel la théorie précédente doive s'appliquer: nous ferons voir à la fin de cette section que dans tous les cas où il faut qu'un fluide quelconque se détermine vers l'entrée d'un canal, par lequel il doit être conduit, il convient, pour la plus grande dépense de ce fluide, que l'entrée du canal soit évasée; mais sans sortir de notre sujet, d'où vient que l'embouchure des rivières à la mer, & surtout dans l'océan, est si large, en comparaison de la largeur commune de leur lit, à quelque distance de la mer ? Ne peut-on pas penser que cela vient du courant contraire du flux, qui remonte dans ces rivières à chaque marée ? Car, toutes les douze heures, la mer venant à s'élever de plusieurs pieds au dessus de son niveau moyen, & cet exhaussement se faisant en six heures de tems, pendant lesquelles l'eau produite par la rivière ne peut pas toujours s'élever aussi vîte que celle de la mer, pour la contre-balancer, il se détermine un courant très-sensible à contre-sens, dont l'océan est le

Digitized by Google

baſſin, & dont l'embouchure de la rivière eſt l'entrée : or, ce courant néceſſite la forme évaſée que nous venons de déterminer pour les canaux. On peut donc croire que l'évaſement de l'embouchure des rivières eſt d'autant plus conſidérable que la hauteur des marées eſt grande, & la pente des rivières petite; parce qu'alors le courant qui s'y établit eſt plus rapide, & que la ténacité des rivages ne peut réſiſter qu'à une viteſſe aſſez bornée. C'eſt une obſervation qu'il ne faut pas négliger dans les travaux qu'on fait quelquefois, pour rémédier aux barres qui ſe forment à l'entrée de quelques rivières : car ſi d'un côté il eſt avantageux de donner plus de chaſſe aux eaux de la rivière à marée baſſe, en bornant ſon lit à une petite largeur, il eſt d'ailleurs à craindre qu'à marée haute le courant contraire ne ſoit plus grand que le premier, ſur-tout dans les tems des ſécheresſes, où la rivière mène peu d'eau à la mer, ce qui peut occaſionner des fouilles à l'entrée du canal, & des dépôts en-deçà de ſon entrée, plus nuiſibles peut-être que la barre qu'on vouloit prévenir. Il n'y a qu'un examen exact de la dépenſe de la rivière, de ſa pente, de la hauteur des marées, & de la viteſſe dans les deux ſens opppoſés, qui puiſſe déterminer la nature des travaux qui conviennent le mieux dans chaque cas.

Le giſement de la côte & de l'embouchure, joint à la direction des houles, peut auſſi contribuer à donner à l'embouchure d'une rivière la

Digitized by Google

forme évasée qu'elle affecte quelquefois; mais c'est toujours l'effet naturel du mouvement des eaux de la mer, qui se porte vers la côte, soit par le flux, soit par les houles, & qui, trouvant ouvert le canal d'une rivière, qui lui oppose peu de résistance par le mouvement propre de ses eaux, se détermine vers le canal, & en dispose l'entrée de la même manière que le fait l'eau d'un bassin qui s'écoule vers un canal.

176. Dans la pratique il faut se conformer à cette disposition de la nature, en n'opposant au cours de l'eau ou à son choc que des formes arrondies, des contours adoucis, & jamais des lignes droites, ni des étranglemens subits, qui occasionnent nécessairement des chutes & des contractions toujours préjudiciables au plus grand débit des eaux, & à la stabilité ou à la durée des ouvrages qu'on fait. Cette règle générale ne doit point se perdre de vue, quand on dispose des quais, des bajoyers, ou des murailles le long des eaux courantes, lorsqu'on trace le confluent ou le partage de deux bras de rivière, qui se réunissent ou qui se divisent pour embrasser une île; & quand enfin on établit des épys & des tunages, pour donner une forme permanente & durable à la tête ou à la queue d'un ouvrage quelconque, exposé au courant ou aux vagues de l'eau.

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

De la dépense des canaux.

177. QUAND l'eau est parvenue à l'uniformité du mouvement dans un canal en pente réglée, on peut considérer tous les filets comme se mouvant avec la même vitesse moyenne, laquelle n'est point produite par la pente, puisque la force accélératrice n'est employée qu'à vaincre la résistance des parois, & à conserver la vitesse acquise : il faut donc que les filets aient acquis leur vitesse par une chute indépendante de la pente, quand l'eau a passé du repos au mouvement, en se portant du réservoir dans le canal. Il suit de-là que si on prolonge jusqu'au réservoir la surface de l'eau du canal, elle doit se trouver au dessous de la superficie du réservoir, d'une quantité égale à la hauteur due à la vitesse uniforme.

Cela seroit exactement vrai, si tous les filets de la veine mue dans le canal avoient la même vitesse & que la section du lit fût uniforme depuis l'origine du canal. Il faudroit pour cela que l'ordre des vitesses fût le même, dès l'entrée du canal, qu'il doit être au dessous, lorsque le cours uniforme & réglé est établi : mais cela n'est pas possible. Car dans un canal d'une largeur constante, & qui, comme nous le supposons ici, n'est point évasé à son entrée, l'eau éprouve d'abord une contraction

Digitized by Google

plus ou moins grande, qui augmente un peu la hauteur de la chute nécessaire pour produire une vitesse moyenne donnée, & les vitesses du fond sont au moins égales à celles de la surface : mais quand le courant sera réglé, ce sera le contraire; la vitesse à la surface sera plus grande que la vitesse moyenne, & celle-ci sera aussi plus grande que celles du fond & des bords. Si, par exemple, la vitesse moyennne uniforme dans le canal doit être de 25 pouces, celle de la surface sera (67) de 30 pouces, & celle du fond, seulement de 20. Or, comment la vitesse de 30 pouces sera-t-elle engendrée? Ce ne peut être que par une chute réelle & locale, plus grande que celle qui doit produire la vitesse moyenne de 25 pouces; & si la chute à l'entrée doit effectivement produire une vitesse de 30 pouces à la surface, la section, prise immédiatement au dessous de la chute, devra être plus petite dans un certain rapport que la section uniforme inférieure; mais cette section ira ensuite en augmentant, à mesure que la résistance des parois modifiera & changera l'ordre des vitesses, en diminuant celles des filets qui avoisinent les parois, & laissant subsister celle de la surface, qui participe très-peu au frottement. La surface de l'eau, à partir du dessous de la chute, sera donc en contrepente; & c'est en effet ce que l'expérience nous a fait voir. Ce n'est qu'à une certaine distance de l'entrée du canal que l'uniformité de la section & de la pente s'établissent.

Digitized by Google

Le mouvement de l'eau ſur cet eſpace plus ou moins long eſt un des objets les plus épineux de l'Hydraulique, & il eſt trop compliqué pour qu'on en ait jamais une connoiſſance exacte. Ce qu'il importe le plus de ſavoir, c'eſt ſi la pente eſt entièrement employée à vaincre, ſur cet eſpace, la réſiſtance des bords, malgré l'irrégularité des viteſſes & des ſections. Les expériences ſur notre canal factice nous ont démontré que cette compenſation a lieu, à très-peu près, en ſorte que la viteſſe & la ſection uniformes s'établiſſent à une certaine diſtance du réſervoir, comme ſi l'uniformité commençoit dès l'origine du canal; nous avons ſeulement remarqué que, pour de très-petites viteſſes, comme de 5 à 6 pouces & au deſſous, la force accélératrice ſurpaſſe un peu la réſiſtance, & qu'une partie de cette force eſt employée à imprimer la viteſſe, en ſorte que la hauteur de la ſection uniforme égale au moins la diſtance verticale de la ſuperficie du réſervoir au fond de l'entrée du canal; diſtance que nous appelons la hauteur du réſervoir.

178. On peut néanmoins négliger cette différence, & conclure en général que, dans un canal de largeur & de pente uniformes, la ſection & la viteſſe moyennes s'établiſſent de manière que la hauteur due à cette viteſſe eſt égale à la différence entre la hauteur du réſervoir & celle de la ſection uniforme.

Ainſi nommant H la hauteur du réſervoir, *h*

Digitized by Google

celle de la ſection, & V la viteſſe uniforme, on doit avoir $\frac{V^2}{2G} = H - h$, d'où l'on tire $h = H - \frac{V^2}{2G}$. Lorſque la viteſſe eſt très-petite, comme de quelques pouces, la quantité $\frac{V^2}{2G}$ devient preſque nulle, & on peut indifféremment prendre $h = H$ ou $= H - \frac{V^2}{2G}$, ſur-tout ſi la hauteur du réſervoir eſt au moins de pluſieurs pouces.

La ſeule incertitude qu'il y ait dans cette équation tombe ſur la valeur de 2G. S'il n'y avoit point de contraction à l'entrée du canal, elle ſeroit égale, comme on ſait, à 724; mais elle diminue d'autant plus que la contraction eſt plus grande. Nous avons déja vu (11) que nos expériences ſur le canal factice nous ont donné cette quantité variable entre 530 & 660, ce qui donne une moyenne un peu moindre que 600. Ces variations ne ſont pas étonnantes, ſi l'on conſidère que l'erreur d'une ligne ou deux ſur l'une des hauteurs de ſection ou de réſervoir, en occaſionneroit une conſidérable ſur leur différence, & ſur la valeur de 2G, & que d'ailleurs notre canal étoit trop court pour que le mouvement y fût dans tous les cas parfaitement réglé. Malgré ces irrégularités, il nous a paru que dans le lit trapèze la valeur de 2G augmentoit un peu avec la hauteur, & par conſéquent la largeur du lit; ce qui montre une diminution de contraction. Il paroît que cet élément eſt peu de choſe à l'entrée des grands canaux,

&

Digitized by Google

& on n'a point d'erreur ſenſible à craindre, en ſuppoſant que la contraction y eſt telle que $2G = 700$. En effet, puiſque la quantité $\frac{V^2}{2G}$ eſt déja peu ſenſible, étant comparée à h dans les grands lits, à plus forte raiſon ne doit-on pas tenir compte, dans la valeur de $2G$, d'une erreur qui ne peut être au plus que de $\frac{1}{20}$.

Sachant donc à quoi s'en tenir ſur la chute & la contraction qui ont lieu à l'entrée d'un canal, on peut réſoudre toutes les queſtions qui ont rapport à ſa dépenſe, par des méthodes d'approximation ſemblables à celles que nous avons employées précédemment. Pour peu qu'on ſoit exercé au calcul, ces recherches offriront peu de difficultés, ſachant ſur-tout que la préciſion de l'analyſe eſt preſque toujours inutile dans la pratique.

PROBLÊME.

179. Connoiſſant la pente, la largeur & la hauteur de réſervoir d'un canal; déterminer ſa dépenſe, ainſi que la profondeur & la viteſſe que le courant y prendra.

La ſeule difficulté que préſente ce problême eſt de déterminer la profondeur du courant. Pour y parvenir, nous ſuppoſerons qu'on ſimplifie la formule du mouvement uniforme, en réduiſant la valeur de la viteſſe moyenne à $\frac{\sqrt{Ngr}}{\sqrt{B}}$, ce qui n'eſt pas difficile; car, puiſque la pente $\frac{1}{b}$ eſt connue,

on peut faire $\sqrt{b} - L.\sqrt{b+1,6} = \sqrt{B}$, & $\sqrt{Ng}$ doit être une quantité moindre que $\sqrt{ng}$, ou 297. Pour trouver sa valeur, il faut 1°. supposer une profondeur un peu moindre que la hauteur du réservoir, ou H; & d'après cette hauteur & la largeur qui est connue, calculer la racine quarrée du rayon moyen, ou $\sqrt{r}$, & la vitesse ou V par la formule du mouvement uniforme; 2°. égaler cette vitesse supposée à $\frac{\sqrt{Ngr}}{\sqrt{B}}$, ce qui donne $V = \frac{\sqrt{Ngr}}{\sqrt{B}}$, d'où l'on tire $\sqrt{Ng} = \frac{V\sqrt{B}}{\sqrt{r}}$. Cette valeur de $\sqrt{Ng}$ sera suffisamment exacte pour tous les cas où la profondeur différera peu de celle qu'on aura supposée, parce qu'une légère différence en plus ou en moins sur la profondeur ne change pas sensiblement la valeur de $\sqrt{r}$.

D'après cette préparation, c'est-à-dire, $\sqrt{Ng}$ étant connue, si on nomme h la profondeur inconnue du canal, & l sa largeur, $\frac{\sqrt{Ng}\sqrt{\frac{lh}{l+2h}}}{\sqrt{B}}$ sera l'expression de la vitesse moyenne de l'eau dans le canal; & la hauteur de la chute due à cette vitesse sera exprimée par $\frac{Ng}{2GB}\left(\frac{lh}{l+2h}\right)$, quantité qui doit être égale à $H-h$. Ainsi l'on a $\frac{Ng}{2GB}\left(\frac{lh}{l+2h}\right) = H-h$, d'où l'on déduit $h = \frac{-\left(l\left(\frac{Ng}{2GB}+1\right)-2H\right)}{4} + \frac{\sqrt{8Hl+\left(l\left(\frac{Ng}{2GB}+1\right)-2H\right)^2}}{4}$. On doit remarquer

Digitized by Google

que, d'après cette expreſſion, la quantité $\frac{g}{2G}$ ſe réduiroit à $\frac{1}{2}$, ſi la contraction étoit nulle; mais 2G eſt toujours un peu moindre que $2g$ ou 724.

180. Pour donner une application de la ſolution de ce problême, nous choiſirons notre quarante-quatrième expérience ſur le canal rectangulaire factice, dans laquelle on avoit $H = 6^{po.},583$; $l = 17^{po.},25$; $\frac{1}{b} = \frac{1}{458}$; & par conſéquent $\sqrt{B} = 18,339$; & où nous ſuppoſons $2G = 600$ pouces, on trouvera $\sqrt{Ng} = 275,5$, & h deviendra $5^{po.},3424$.

D'après cette valeur on conclut la vraie viteſſe $V = 27^{po.},28$, & la dépenſe de 2514 pouces cubes par ſeconde, au lieu de 2440,4, qu'a donné l'expérience. Cette dernière quantité, diviſée par la ſection meſurée, avoit donné une viteſſe moyenne de $28^{po.},29$, tandis que celle que nous avions calculée par la formule, d'après la profondeur meſurée (108 exp. du tableau §. 55), n'étoit que de 26,69. On voit donc que la première, donnée par la ſolution du problême précédent, tient le milieu entre les deux dernières, en rectifiant les petites erreurs de l'expérience; ce qui confirme ce que nous avons dit de la difficulté de régler un canal dont la longueur eſt bornée. Preſque toutes les autres expériences préſentent le même réſultat.

Digitized by Google

PROBLÊME.

181. La hauteur du réservoir, la pente du canal & sa dépense étant connues; on demande ses dimensions.

Soient x & y la profondeur & la largeur moyenne du canal, D sa dépense; l'équation $\frac{D}{xy} = \sqrt{2G}\sqrt{H-x}$ donneroit une première valeur de y, en fonction de x, qu'on égaleroit à celle qu'on tireroit de l'équation suivante $\frac{D}{xy} = \frac{\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}}\sqrt{\frac{xy}{y+2x}}$, afin d'avoir une seule équation en x & en données. Mais malgré la simplification de la formule du mouvement uniforme, il y a ici de quoi rebuter le calculateur le plus intrépide : il faut donc se contenter d'une méthode d'approximation dont nous allons donner l'exemple dans l'application suivante.

Nous supposerons la hauteur du réservoir de 18 pouces, la pente de $\frac{1}{1000}$, & la dépense qu'on veut se procurer, de 1200 pieds cubes d'eau par minute; il s'agit de trouver les dimensions d'un canal trapèze, dont les taluds sont aux $\frac{4}{3}$.

Un premier apperçu suffira pour montrer qu'en prenant $\frac{V^2}{700}$ pour la hauteur due à la vitesse; cette quantité ne peut être qu'entre 1 & 3 pouces. Supposons la d'abord de 2 pouces, & par conséquent la profondeur dans le canal de 16 pouces : d'après cette hypothèse, on cherchera, par la méthode du

Digitized by Google

paragraphe 124; quelle doit être la largeur moyenne du canal, en employant l'équation $l = \frac{D}{h(\sqrt{r}-0,1)\left(\frac{297}{\sqrt{B}}-0,3\right)}$, dans laquelle D = 20 pieds cubes, $\sqrt{B} = 28,153$, & $h = 16$ pouces, on trouvera $l = 5^{pi.},52$, à très-peu près; la section égale à $7^{pi.},36$; & $V = 32^{po.},6$, dont la hauteur due est $1^{po.},5182$, au lieu de 2 pouces : si on retranche cette nouvelle quantité de 18 pouces, le reste 16,4818 différera très-peu de la véritable profondeur de l'eau dans le canal, de sorte qu'en conservant la même section & la même vitesse que ci-dessus, on concluroit, avec une précision suffisante dans la pratique, que la largeur moyenne est de $5^{pi.},358$, & celle du fond de $3^{pi.},527 = 3^{pi.}\ 6^{po.}\ 4^{li.}$.

Ceci est fondé sur ce que la largeur diminuant peu, & en même proportion que la hauteur augmente, le rayon moyen, & par conséquent la vitesse, ne varient pas sensiblement. Si on vouloit tenir compte de cette petite erreur, & approcher encore plus de l'exactitude, il n'y auroit qu'à augmenter la hauteur due à la vitesse dans le rapport du premier rayon moyen à celui qui est relatif aux nouvelles dimensions; alors cette hauteur due deviendroit $1^{po.},53$, répondante à une vitesse de $32^{po.},72$; la profondeur plus précise du courant seroit de $18^{po.} - 1^{po.},53 = 16^{po.},47$; le quotient de la dépense par cette dernière vitesse donneroit la

Digitized by Google

ſection de $7^{pi.},335$ quarrés, & en la diviſant par la nouvelle profondeur, on auroit $5^{pi.},344$ pour la largeur moyenne plus exacte ; celle du fond ſeroit de $3^{pi.},514 = 3^{pi.}\ 6^{po.}\ 2^{li.}$.

182. Ce problême peut ſervir dans la pratique, quand on veut, par exemple, dériver d'une rivière ou d'un lac une certaine quantité d'eau, pour arroſer pendant les ſéchereſſes un terrain éloigné & inférieur. On pourroit deſirer auſſi, en vue de mouvoir une machine, de ſe procurer un courant qui ait une viteſſe déterminée ; & la connoiſſance de la viteſſe rend ces ſortes de queſtions plus ſimples : car la viteſſe & la pente étant connues, on déterminera la valeur du rayon moyen, & la profondeur du courant ſera connue par la différence entre la hauteur du réſervoir & celle qui eſt due à la viteſſe. Ainſi on trouvera aiſément la largeur & la dépenſe (62).

De même, ſi la dépenſe étoit connue, ainſi que la viteſſe & la hauteur du réſervoir, on chercheroit les dimenſions du lit ; & le rayon moyen étant formé, on parviendroit à connoître la pente.

Lorſque la pente d'un canal eſt telle que la hauteur de la ſection diffère peu de celle du réſervoir, la viteſſe, & par conſéquent la dépenſe, ne ſont pas conſidérables. Si au contraire la pente étoit aſſez grande pour que la hauteur de la ſection fût très-petite en comparaiſon de celle du réſervoir, la petiteſſe de la ſection rendroit la dépenſe moindre, malgré l'augmentation de la viteſſe. Il y a

Digitized by Google

donc un point intermédiaire, où la dépense seroit la plus grande possible. C'est ce que nous allons déterminer dans le problême suivant.

PROBLÊME.

183. Connoissant la hauteur d'un réservoir constamment plein, au dessus du fond d'un canal rectangulaire, dont la largeur est donnée; on demande la pente nécessaire, la profondeur & la vitesse du courant, pour écouler la plus grande quantité d'eau possible.

Soit x la profondeur inconnue; $H-x$ sera la hauteur due à la vitesse, & $\sqrt{2G}\sqrt{H-x}$ sera la vitesse même, laquelle multipliée par la section lx du lit, donnera la dépense. Ainsi $lx\sqrt{2G}\sqrt{H-x}$ doit être un maximum; prenant la différentielle de cette quantité, & l'égalant à zéro, on trouve l'équation $2H=3x$, d'où l'on tire $x=\frac{2}{3}H$. Ainsi la profondeur de l'eau dans le canal étant $\frac{2}{3}H$, la vitesse moyenne sera $\sqrt{2G}\sqrt{\frac{1}{3}H}$; sa section $\frac{2}{3}lH$; sa dépense devient $\frac{2}{3}\sqrt{2G}\,lH\sqrt{\frac{1}{3}H}$, & son rayon moyen $\frac{\frac{2}{3}lH}{l+\frac{4}{3}H}$. D'après ces données, il est aisé de déterminer la pente.

Si le lit avoit la figure d'un trapèze, le problême seroit moins simple, & il exigeroit la résolution d'une équation du troisième degré, pour trouver la valeur de x.

Digitized by Google

184. On a de la peine à concevoir comment la dépense pourroit diminuer, en supposant une pente plus grande que celle que nous venons de déterminer : cependant il faut de deux choses l'une, ou que le mouvement ne devienne jamais uniforme dans un tel canal, ou que la dépense diminue. En supposant néanmoins qu'elle pût augmenter, il est possible de juger jusqu'à quel point; il n'y a pour cela qu'à prendre le cas extrême, c'est-à-dire supposer le lit du canal vertical; en ce cas son entrée est un véritable reversoir : or nous avons vu que la dépense du reversoir est toujours égale à $\frac{2}{3}\sqrt{2G}\,l\,(h^{\frac{3}{2}} - (\frac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}}$. Ainsi la plus grande dépense du canal, telle qu'elle est déterminée dans le problême précédent, est à celle d'un reversoir des mêmes dimensions comme $H\sqrt{\frac{1}{3}H} : H^{\frac{3}{2}} - (\frac{1}{2}H)^{\frac{3}{2}}$, ou comme $H\sqrt{\frac{1}{3}H} : H\sqrt{H} - \frac{1}{2}H\sqrt{\frac{1}{2}H}$, $::5773:6465$, ou enfin $::9:10$, à-peu-près. Si donc une plus grande pente fait augmenter la dépense, ce ne peut être que de $\frac{1}{9}$.

PROBLÊME.

185. Toutes choses étant données comme dans le problême précédent; on demande que la dépense du canal soit égale à une donnée moindre que la précédente.

En conservant les mêmes dénominations que ci-devant, on a de plus ici la valeur de la dépense,

Digitized by Google

qu'on nommera D; & la viteſſe moyenne ſera $\frac{D}{lx} = \sqrt{2G}\sqrt{H-x}$, d'où l'on tire $x^3 - Hx^2 = -\frac{D^2}{2Gl^2}$, équation du troiſième degré, qui, d'après ce que nous venons de dire ſur le maximum de dépenſe, doit avoir deux racines réelles, répondantes à des pentes différentes; mais on ſent bien que celle qui indique la plus grande hauteur de ſection eſt la ſeule qui puiſſe être de quelque utilité dans la pratique. Quoi qu'il en ſoit, comme x différera peu de H dans les cas ordinaires, on en obtiendra plus facilement la valeur par une ſimple approximation que par les méthodes ordinaires. Cette hauteur fera connoître la viteſſe, la ſection & la pente.

PROBLÊME.

186. Connoiſſant l'étendue d'un réſervoir qui ſe vide par un canal rectangulaire, dont la largeur & la pente ſont données; on demande la relation entre le tems de l'écoulement & la quantité dont la ſuperficie du réſervoir s'abaiſſe.

Cette queſtion préſente pluſieurs difficultés, qu'on peut néanmoins éluder, en conſervant une préciſion plus que ſuffiſante, ſi on obſerve que, lorſque les hauteurs du réſervoir diffèrent peu entre elles, on a ſenſiblement les rapports ſuivans : 1°. les viteſſes dans le canal ſont comme les racines quarrées des rayons moyens; 2°. les rayons moyens ſont comme les profondeurs d'eau dans le canal : ainſi

Digitized by Google

les ſommes des profondeurs & des hauteurs dues aux viteſſes, ou bien les hauteurs du réſervoir, ſont comme les quarrés des viteſſes, ou comme les profondeurs d'eau dans le canal. On cherchera donc, pour une hauteur de réſervoir moyenne, entre deux extrêmes données, les rapports de cette hauteur avec la profondeur de l'eau & avec le rayon moyen.

Soient $\frac{1}{p}$ & $\frac{1}{q}$ ces rapports; a la quantité dont la ſuperficie du réſervoir s'abaiſſe pendant le tems t; & S l'étendue de cette ſuperficie : après l'abaiſſement quelconque x, $H-x$ ſera la hauteur du réſervoir; $\frac{H-x}{p}$ ſera la profondeur de l'eau dans le canal; $\frac{H-x}{q}$ le rayon moyen; & $\frac{\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}}\sqrt{\frac{H-x}{q}}$ la viteſſe avec la formule ſimplifiée : à ce point, la dépenſe, pendant l'unité de tems, ſeroit $\frac{\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}}\sqrt{\frac{H-x}{q}}\,l\frac{(H-x)}{p}=\frac{l\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}\,p\sqrt{q}}(H-x)^{\frac{3}{2}}$; & pendant un tems infiniment petit, $\frac{l\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}\,p\sqrt{q}}dt(H-x)^{\frac{3}{2}}$; dans le même inſtant la ſurface du réſervoir deſcendroit d'une quantité dx : on a donc l'équation des deux dépenſes $\frac{l\sqrt{Ng}\,dt}{\sqrt{B}\,p\sqrt{q}}(H-x)^{\frac{3}{2}}=Sdx$, ou $dt=\frac{\sqrt{B}\,Sp\sqrt{q}}{l\sqrt{Ng}}\frac{dx}{(H-x)^{\frac{3}{2}}}$, qui, étant intégrée, donne $t=\frac{2\sqrt{B}\,Sp\sqrt{q}}{l\sqrt{Ng}\sqrt{H-x}}+c$. On voit que lorſque $x=0$, $t=0$, & que la conſtante devient $-\frac{2\sqrt{B}\,Sp\sqrt{q}}{l\sqrt{NgH}}$:

Digitized by Google

ainsi la valeur complette du tems, réduit en minute, est $t = \frac{2\sqrt{B}Sp\sqrt{q}}{60l\sqrt{Ng}}\left(\frac{1}{\sqrt{H-a}} - \frac{1}{\sqrt{H}}\right)$.

187. Appliquons ce calcul à l'abaissement du réservoir qui fournissoit les eaux à notre canal factice, sur une hauteur de réservoir de 6 pouces 7 lignes, tandis que la surface du réservoir étoit d'environ 4900 toises quarrées, la pente du canal $\frac{1}{458}$, sa largeur $17^{po.}\frac{1}{4}$; ce sont les données de l'expérience quarante-quatrième, d'après lesquelles le coëfficient réellement constant $\frac{2\sqrt{B}S}{60l}$ est égal à $900168^{po.},5$. Pour pouvoir considérer comme constante la quantité $\frac{p\sqrt{q}}{\sqrt{Ng}}$, il faut prendre une valeur de a un peu petite, relativement à H. Supposons donc que la superficie du réservoir baisse d'un pouce, sa hauteur moyenne sera égale à 6 pouces une ligne; les valeurs de $\sqrt{Ng}$ de p & de q, qui sont 275,02, 1,23845, & 1,94378, donnent 159,292 pour la valeur de la quantité $\frac{\sqrt{Ng}}{p\sqrt{q}}$, qui servira de diviseur à la première; $\frac{1}{\sqrt{H-a}} - \frac{1}{\sqrt{H}}$ vaudra 0,033566, & on aura $t = 189',77$.

Si on fait ensuite $H = 5^{po.}\ 7^{li.}$, & qu'on cherche de nouveau le tems d'un nouvel abaissement d'un pouce, on aura $\sqrt{Ng} = 273,96$; $p = 1,253$; $q = 1,8435$; & $\frac{\sqrt{Ng}}{p\sqrt{q}} = 161,086$. Ainsi $t = 245',05$. Pour un troisième abaissement depuis 4 pouces 7

Digitized by Google

lignes jusqu'à 3 pouces 7 lignes, on aura $\sqrt{Ng} =$ 272,46; $p = 1,2679$; $q = 1,7414$; & $\frac{\sqrt{Ng}}{p\sqrt{q}} =$ 162,838, d'où l'on tire $t = 338',38$. Ainsi la somme des tems, pour une descente de 3 pouces, sera 773',2 : on voit aussi que les valeurs de $\frac{\sqrt{Ng}}{p\sqrt{q}}$ varient si peu, qu'on a eu raison de les supposer constantes pour une descente d'un pouce. Enfin, en calculant directement le tems total de la descente de 3 pouces avec la valeur constante de $\frac{\sqrt{Ng}}{p\sqrt{q}} = 161,086$, qui répond à une hauteur de réservoir moyenne entre 6 pouces 7 lignes & 3 pouces 7 lignes, on a $t = 774',1$, qui diffère bien peu du précédent.

188. Ce problême peut servir à connoître combien de tems il faudra pour écouler un lac, ou une inondation qu'on veut saigner par le moyen d'un canal, en faisant cependant une observation très-importante : c'est que dans un bassin naturel, dont le fond va toujours en se rétrécissant, la surface S diminue à mesure que les hauteurs du réservoir s'abaissent; de sorte que les tems, pour des abaissemens égaux, peuvent être à-peu-près égaux eux-mêmes, ainsi qu'on l'a observé dans le tems de l'écoulement des marais de Condé, lorsqu'ils se desséchent au printems : il est vrai que cette égalité n'a plus lieu quand le desséchement tire à sa fin, & qu'il ne reste que quelques pouces de hauteur d'eau, parce que le fond de cuve est plus applati, & que

Digitized by Google

la pointe des herbes dont les prairies se couvrent alors, s'oppose à l'écoulement, en retenant les eaux. Passons à l'examen des dépenses des canaux dont l'entrée est garnie d'une vanne.

CHAPITRE VII.

Des canaux garnis d'un vannage à leur tête.

189. NOUS n'avons considéré jusqu'à présent le mouvement de l'eau dans les canaux, qu'en supposant qu'elle y entre librement & sans autre obstacle que celui de la contraction; mais il arrive souvent que cette entrée est garnie d'une vanne, qui, n'étant élevée que d'une certaine hauteur, beaucoup moindre que celle du réservoir, forme un orifice par lequel l'eau passe du réservoir dans le canal. Cette disposition change le cours de l'eau, & demande d'être considérée séparément.

Si l'eau, au sortir de l'orifice que forme un vannage, coule dans un canal dont la pente & les dimensions soient telles que la hauteur de la section soit à-peu-près égale à la hauteur dont la vanne est levée, il paroît évident que l'eau du canal ne peut point réagir contre celle qui sort de l'orifice, & que la dépense sera la même que si le canal n'existoit pas. Cette vérité est en effet confirmée par les expériences de M. l'Abbé Bossut : dans ce cas, la dépense, commune à l'orifice & au canal, est due

Digitized by Google

à la charge entière relative à chaque point de l'orifice; & c'eſt ainſi que dans les tuyaux de conduite fixés à la pente qui convient au mouvement uniforme, avec une charge ſuffiſante à leur tête, nous avons toujours compté cette charge qui imprime la viteſſe, depuis la ſuperficie du réſervoir juſqu'au centre de l'orifice ſupérieur.

Dans un canal ouvert, ſi la charge ou la hauteur du réſervoir reſte la même, ainſi que l'élévation de la vanne, on peut augmenter la pente, ſans que la dépenſe augmente; mais ſi la pente au contraire vient à diminuer, la dépenſe ne peut reſter conſtante; car l'eau ne peut plus couler dans le canal ſans prendre une ſection plus élevée que celle de l'orifice, ce qui la fait refluer vers la vanne, contre laquelle elle commence à s'appuyer; or, cette portion d'eau, plus élevée que le ſommet de l'orifice, étant conſidérée comme ſtagnante, doit contrarier & diminuer l'effet de la charge entière.

Il paroît impoſſible de déterminer avec préciſion à quelle pente l'eau du canal commence à contre-balancer celle qui paſſe à l'orifice; car la contraction qui a lieu au paſſage de l'orifice, empêche l'eau de prendre, dès l'origine du canal, toute la hauteur qu'elle doit prendre enſuite pour couler uniformément. Il eſt vrai que quand elle eſt parvenue à cette hauteur uniforme, il ſe fait un remou en arrière, vers l'origine du canal; mais tant que ce remou ne remonte

Digitized by Google

pas jusqu'à la vanne, la dépense est la même que si le canal n'existoit pas. Ainsi la hauteur uniforme de l'eau peut excéder un peu l'élévation de la vanne, sans nuire à la dépense, laquelle ne commence à diminuer que quand le remou couvre la veine contractée : alors cette diminution devient d'autant plus sensible, qu'une plus grande hauteur d'eau s'appuie contre la vanne, à son aval; mais cette même hauteur est toujours moindre que l'élévation de la section uniforme, parce que l'eau qui la forme est entraînée par le mouvement rapide de celle qui passe sous la vanne. Ainsi, dans les canaux qui ont une grande pente, il y a une différence considérable entre la hauteur de l'eau en dessous, c'est-à-dire à l'aval de la vanne, & celle du courant uniforme; mais cette différence peut être négligée dans les canaux ordinaires, où la pente est petite : on peut alors considérer la vitesse à l'orifice comme étant due à la différence entre la hauteur entière du réservoir, sur le fond de l'entrée du canal, & la profondeur uniforme de l'eau dans le canal, ainsi que nous l'avons déja dit ci-devant (177 & 178).

190. Soit donc H la hauteur du réservoir, h & l la profondeur & la largeur moyenne du canal, E & L l'élévation & la largeur de la vanne rectangulaire; $EL\sqrt{H-h}\sqrt{2G}$ sera la dépense de l'orifice, & $lh\frac{\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}}\sqrt{\frac{lh}{l+2h}}$ sera celle du canal. Ces deux dépenses devant être égales, on aura l'équa-

Digitized by Google

tion $EL\sqrt{H-h}\sqrt{2G}=lh\frac{\sqrt{Ng}}{\sqrt{B}}\sqrt{\frac{lh}{l+2h}}$, qui eſt la clef de tous les problêmes qu'on peut propoſer à cet égard. Il eſt vrai qu'il reſte encore quelque incertitude ſur la valeur de 2G, qui eſt relative à la contraction; néanmoins ſi les vannes ne laiſſent qu'un ou deux pieds quarrés d'ouverture, & n'ont que quelques pouces d'épaiſſeur, on doit, comme dans un orifice mince, faire $2G=278$ (§. 7); mais ſi le canal n'eſt pas plus large que la vanne, & que l'écluſe ſoit jointive au réſervoir, la contraction ſera la même qu'aux tuyaux, & on aura $2G=478$. Cette quantité augmenteroit encore pour de plus grandes dimenſions, & ſur-tout ſi l'écluſe étoit précédée d'un avant-canal, ou d'aîles évaſées.

D'après ces principes, nous donnerons quelques applications à la pratique par les problêmes ſuivans.

PROBLÊME.

191. Soit un canal de dérivation, qui tire de l'eau d'un baſſin entretenu conſtamment plein, au moyen d'une écluſe d'entrée garnie d'une vanne, ſous laquelle paſſe l'eau; ſi on ſuppoſe connues la largeur de la vanne, & la hauteur dont elle eſt levée, la hauteur du réſervoir, la largeur & la pente du canal; on demande quelle ſera la profondeur de l'eau dans le canal, ſa viteſſe & la dépenſe.

On peut employer ici la méthode indiquée pour le problême précédent (179), en faiſant une première

Digitized by Google

première supposition pour trouver la valeur du rayon moyen : alors l'équation $EL\sqrt{H-h}\sqrt{2G} = \frac{lh\sqrt{Ngr}}{l\sqrt{B}}$ donnera $h = \frac{GE^2L^2B}{l^2Ngr} + \sqrt{\frac{GE^2L^2BH}{l^2Ngr} + \left(\frac{GE^2L^2B}{l^2Ngr}\right)^2}$; & si cette valeur diffère sensiblement de celle qu'on aura supposée pour former le rayon moyen r, une seconde opération, en employant h, pour former un nouveau rayon moyen, rectifiera la première.

PROBLÊME.

192. Les dimensions & la pente du lit, la vitesse & la dépense ordinaires d'une rivière étant données, on veut, par le moyen d'un vannage, soutenir la rivière à une hauteur connue en amont de l'écluse ; on demande quelle doit être l'aire de l'orifice en dessous de la vanne.

On doit remarquer que l'eau de la rivière ou du réservoir, au dessus de la vanne, n'étant pas stagnante, il faut tenir compte de la hauteur due à la vitesse moyenne en amont, comme d'une augmentation réelle à la hauteur du réservoir. Ainsi H est composé de la hauteur qu'on veut se procurer, & de celle qui est due à la vitesse en amont ; h, ou la profondeur de l'eau au dessous de l'écluse, n'est autre chose que la profondeur ordinaire de la rivière. D'après cela, on a $EL = \frac{lh\sqrt{Ngr}}{\sqrt{2GB(H-h)}} = \frac{D}{\sqrt{2G(H-h)}}$.

Si l'aire de l'orifice étoit connue, & qu'on

Digitized by Google

demandât la hauteur à laquelle l'eau s'élèveroit en amont, ou auroit $H - h = \frac{D^2}{2GE^2L^2}$ pour l'expreſſion de la quantité dont l'eau s'élèveroit au deſſus de ſon niveau ordinaire : mais il faudroit retrancher de cette quantité la hauteur due à la viteſſe acquiſe, de ſorte que ſi la vanne avoit la même largeur que la rivière, & qu'on l'élevât juſqu'à la ſurface ordinaire de l'eau, $\frac{D^2}{2GE^2l}$, qui eſt la hauteur due à la viteſſe de l'eau ſous la vanne, ſeroit égale à celle de la rivière; & on auroit $H - h = 0$.

193. Les problêmes précédens ont lieu dans la ſuppoſition que l'élévation de la vanne eſt moindre que la profondeur d'eau dans le canal : c'eſt le cas le plus ordinaire; & il faut que le canal ait une pente bien conſidérable, pour que le contraire ait lieu. Pour en juger à-peu-près, ſoient données l'aire de l'orifice, la hauteur du réſervoir, & la ſection de l'eau dans le canal, ayant même hauteur que l'élévation de la vanne; les deux premières données feront connoître la dépenſe; les différens filets de l'orifice auront des viteſſes dues à leur profondeur, au deſſous de la ſuperficie du réſervoir; & cette dépenſe étant connue, ainſi que les dimenſions du lit, il ſera facile d'en déduire la pente du canal : cette pente pourroit à la vérité n'être pas très grande, ſi la largeur du canal excédoit de beaucoup celle de la vanne; mais elle le ſera; à coup ſûr, ſi ces deux dimenſions ſont égales. M. l'Abbé Boſſut rapporte dans ſon Hydrodynamiqne, 2e.

Digitized by Google

partie, chapitre 7, plusieurs expériences qui sont dans ce cas : il avoit fait construire en bois un canal rectangulaire de 5 pouces de largeur & de 600 pieds de longueur, auquel il donna une pente d'un dixième de la ligne de niveau; l'origine du canal étoit garnie d'une petite vanne ou pale de même largeur, qu'on levoit d'un & de deux pouces, pour recevoir l'eau d'un réservoir entretenu constamment plein; la surface de l'eau du réservoir pouvoit être fixée à différentes hauteurs, pour varier les charges, & on mesuroit dans chaque cas la vitesse de l'eau dans le canal, à sa surface, par les tems employés à parcourir chaque 100 pieds de longueur; cette vitesse devenoit sensiblement uniforme dans un canal aussi long & de dimensions si petites; mais on ne tint point compte de la profondeur uniforme, presque toujours moindre que deux pouces. Des expériences si précieuses, par l'exactitude de la mesure de la vitesse à la surface, méritent bien d'être confrontées avec notre théorie du mouvement des eaux dans des lits ouverts; & on va voir qu'elles présentent des résultats très-satisfaisans. Nous avons d'abord déterminé la dépense, d'après la grandeur de l'orifice, & la hauteur moyenne du réservoir, en estimant la contraction égale à celle des tuyaux, c'est-à-dire en faisant $2G=478$; & comme on sait que cette hauteur moyenne devient sensiblement moindre que celle qui répond au centre de l'orifice, quand la hauteur totale du réservoir ne surpasse pas de

Digitized by Google

beaucoup celle de l'orifice (Hyd. 251), nous avons tenu compte de cette différence dans les expériences où la hauteur du réservoir n'étoit que de 4 pouces.

Ayant, par ce moyen, connu la dépense de l'orifice & du canal, dans chaque cas, nous avons résolu autant de fois le problème (123), dans lequel il s'agit de déterminer la profondeur uniforme & la vitesse moyenne, dans un canal dont on connoît la dépense, la pente & la largeur.

194. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant, pour les 8 expériences, dans lesquelles le canal avoit 600 pieds de longueur, & devoit être le mieux réglé. La pente étant de $\frac{1}{10,02}$ de la ligne de niveau, elle revient à $\frac{1}{10,05}$, suivant notre manière de l'exprimer, & donne $\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}=1,944$.

NUMÉROS des expériences de M. l'Abbé Bossut.	HAUTEUR totale du réservoir.	HAUTEUR moyenne du réservoir.	HAUTEUR de l'orifice.	DÉPENSE par seconde calculée.	PROFONDEUR uniforme dans le canal.	VITESSE moyenne dans le canal.
eme.	po.	po.	po.	po. cu.	po.	po.
51	48	47,5	1	753,40	1,2240	122,97
52	48	47,0	2	1498,86	2,0447	146,43
53	24	23,5	1	529,53	0,9511	111,32
54	24	23,0	2	1048,52	1,5608	134,22
55	12	11,5	1	370,70	0,7406	100,00
56	12	11,0	2	724,15	1,1893	121,63
57	4	3,4944	1	204,35	0,4938	82,66
58	4	2,9720	2	376,91	0,7492	100,52

195. Pour faire usage des vitesses moyennes, calculées ici suivant notre formule du mouvement uniforme, nous les avons comparées avec celles

Digitized by Google

qu'on déduiroit des viteſſes à la ſurface, que M. l'Abbé Boſſut a meſurées. Avant d'en préſenter la comparaiſon, il eſt bon de remarquer que les tems employés à parcourir la longueur du canal de 100 en 100 pieds, ne ſont pas toujours parfaitement égaux; ce qui feroit ſoupçonner une irrégularité dans le mouvement, ſi on ne comptoit pas ſur les petites erreurs inévitables dans ces ſortes de meſures, & ſi ces défauts d'uniformité n'étoient pas tantôt en plus, tantôt en moins. M. l'Abbé Boſſut a généralement remarqué dans ſes expériences que les premiers 100 pieds étoient parcourus en un peu moins de tems que les autres; & cela doit être, car nous avons déja dit que dans tout lit la force accélératrice n'eſt parfaitement détruite par la réſiſtance qu'à une certaine diſtance de l'origine : il en étoit de même à l'extrémité inférieure du canal; l'eau y reverſant librement, devoit s'abaiſſer à la dernière diviſion, & prendre une viteſſe un peu plus grande. Il a donc fallu, pour avoir la viteſſe la plus exacte, ne compter que ſur les tems employés à parcourir les diviſions intermédiaires, & s'il s'y trouve encore quelques légères différences, nous en avons tenu compte. Ayant donc fixé la viteſſe uniforme d'expérience à la ſurface du courant, nous en avons conclu la viteſſe moyenne par la méthode du (§. 66), & nous l'avons comparée à celles du tableau précédent. Tous ces réſultats ſont exprimés dans le tableau ſuivant. La première colonne

Digitized by Google

indique le nombre de ſecondes employées à parcourir 100 pieds ; la ſeconde, les viteſſes par ſeconde à la ſurface du courant ; la troiſième, les viteſſes moyennes calculées d'après celles de la ſurface ; & la quatrième, les viteſſes moyennes uniformes trouvées dans le tableau précédent, & déduites de la dépenſe, la pente & la largeur du canal.

NUMEROS des expériences de M. l'Abbé Boſſut.	NOMBRE de ſecondes employées à parcourir 100 pieds.	VITESSE à la ſurface, exprimée en pouces.	VITESSE moyenne, calculée d'après la précédente.	VITESSE moyenne, calculée dans le 1er. tableau.
	"	po.	po.	po.
51	9,0	133,33	122,28	122,97
52	7,5	160,00	147,85	146,43
53	9,8	122,45	111,88	111,32
54	8,0	150,00	138,25	134,22
55	11,0	109,09	99,14	100,00
56	9,1	131,87	120,88	121,63
57	13,0	92,30	83,19	82,66
58	11,0	109,09	99,14	100,52

196. Cette comparaiſon ne peut qu'augmenter la confiance que nous croyons due à la théorie du mouvement uniforme, & à la relation que nous avons trouvée, par nos propres expériences, entre la viteſſe moyenne & celle de la ſurface. On peut remarquer que les différences entre les viteſſes des deux dernières colonnes ſe compenſent ſi bien qu'en prenant une réduite ſur chacune de ces colonnes, elles ne diffèrent pas de 3 ſur mille. Nous n'avons pas fait le même travail ſur les autres expériences de M. l'Abbé Boſſut, parce que le canal

Digitized by Google

y étoit beaucoup plus court, & que cet Académicien les a faites dans d'autres vues.

CHAPITRE VIII.

Des canaux de desséchement, & de leurs accrues.

197. POUR ne rien omettre d'essentiel dans la matière que nous traitons, il reste à examiner quels sont les moyens les plus convenables de dessécher un terrain, où les eaux de pluie & celles des ruisseaux & des sources s'amassent pendant l'hiver, comme dans un fond de cuve, sans pouvoir s'écouler dans une rivière voisine, tant que l'eau de celle ci se trouve elle-même plus haute que le fond du bassin qui sert de réceptacle à ces eaux.

Si l'art de manier les eaux & de les conduire suivant les besoins de la société, rend aux hommes des services importans, & contribue à l'embellissement de leur demeure, ou aux progrès du commerce, on peut dire qu'ici il crée, pour ainsi dire, de nouvelles richesses, en fertilisant des terrains qu'un marais infect & fangeux rendoit aussi nuisibles & aussi mal sains qu'ils deviennent rians & précieux par le desséchement. Un pays sauvage & marécageux, couvert de roseaux, inaccessible aux troupeaux, repaire d'oiseaux aquatiques, abandonné à quelques misérables pêcheurs, une fois

Digitized by Google

délivré des eaux ſous leſquelles il étoit noyé, ouvre ſon ſein, reçoit de précieuſes ſemences, ſe couvre de riches dépouilles, donne la vie à de nombreux beſtiaux, fait les délices & procure l'abondance de l'homme induſtrieux qui l'a fertiliſé; de nouvelles familles s'y établiſſent & s'y multiplient, & la nature ſe montre d'autant plus empreſſée & plus magnifique a récompenſer leurs travaux, qu'elle avoit long-tems malgré elle renfermé ſes tréſors dans un ſein ſtérile & glacé par les eaux. Les pays nouvellement habités par le genre humain, comme une grande partie de l'Amérique & des terres auſtrales, ſont encore preſque couverts de marais & de lacs; & ils demeureroient encore long-tems dans cet état, ſi la population, qui y prend tous les jours de nouveaux accroiſſemens, n'augmentoit l'induſtrie, en multipliant les bras des cultivateurs, en même tems que leurs beſoins. L'auteur de la nature a formé les maſſes des montagnes, il a modelé les vallons & les côteaux, il a tracé le cours des fleuves, & ſillonné le lit des rivières, mais il a laiſſé à l'homme le ſoin de deſſécher ſa demeure & le champ qui le doit nourrir, parce que cette tâche n'excède pas ſes forces, & qu'il étoit avantageux que les parties du globe où l'homme n'avoit pas encore pénétré, demeuraſſent couvertes de forêts & de lacs, pour garder comme en réſerve les ſucs de la terre, que l'injure de l'air, l'ardeur du ſoleil, & le principe deſtructeur des pluies auroient diſſipés en pure perte, ſans cette ſauve-

Digitized by Google

garde ; c'eſt donc à lui à ſe charger du ſoin d'ouvrir ces tréſors ſi bien conſervés, de remercier l'auteur de tout bien, qui les a ménagés pour ſon uſage, & de répondre à ſes vues bienfaiſantes par une économe adminiſtration, qui laiſſe aux hommes à venir la part qu'ils ont droit d'attendre, comme les derniers venus, à un héritage dont leurs pères auront joui ſans le diſſiper. Il ſe trouve encore des cantons marécageux au centre des provinces les plus peuplées & les mieux cultivées, ſoit que l'induſtrie n'ait pas encore tenté de les deſſécher, ſoit que l'adminiſtration n'ait pas pu empêcher quantité de petits abus, dont les ſuites ſont l'exhauſſement du lit des rivières, & l'impoſſibilité d'écouler complettement les eaux de pluie : c'eſt à l'adminiſtration à chercher des remèdes à ces maux, & à encourager les ſciences & les arts, à qui il il appartient de poſer des principes généraux & ſûrs, dont il ne reſte qu'à faire une judicieuſe application. Le problême des canaux de deſſéchement eſt donc d'une grande importance, quoiqu'on ne trouve rien à cet égard dans les auteurs. Eſſayons d'en donner une notion claire & exacte, & de le réſoudre, à l'aide de notre nouvelle théorie.

198. Soit un baſſin A, qui ſe remplit naturellement d'eau ou par les pluies du ciel, ou par des ſources, ou par quelques ruiſſeaux qui viennent s'y rendre : il n'a point d'autre écoulement que le petit canal AB, qui jette ſes eaux dans la rivière BCDE, & ainſi ſes eaux ſeront à-peu-près de Fig. 21.

Digitized by Google

niveau à la ſurface de la rivière en B, d'où il eſt aiſé de conclure que ce baſſin ne peut pas être deſſéché, à moins qu'en été la rivière ne baiſſe, par les ſéchereſſes, d'une hauteur au moins égale à la profondeur de l'eau du baſſin : mais ce deſſéchement complet n'ayant lieu que vers les mois de Juillet ou d'Août, il ne peut pas procurer beaucoup d'avantages; & les exhalaiſons mal-ſaines qui s'élèvent alors d'un ſol couvert de fange, cauſent une putréfaction très-dangereuſe : un deſſéchement permanent & conſtant rendroit à l'agriculture un fond nouveau, & préviendroit l'infection de l'air. Pour ſe procurer ces deux avantages, on propoſe de creuſer un autre canal AC ou AD & même AE, & on demande quel eſt celui des trois qui ſera le plus avantageux, quelle longueur il faudra lui donner, & quelles doivent être ſes dimenſions, pour que le deſſéchement ſoit complet dans tous les cas.

199. Pour répondre à la première queſtion, j'obſerve que ſi on ſuppoſe la longueur du canal AC égale à la portion BC du lit de la rivière, & que le canal AD ſoit auſſi d'une longueur égale à la portion BD, qui lui répond, il eſt évident que ces deux canaux, ayant l'un & l'autre la même pente, & étant ſuppoſés de ſections égales, feront la même dépenſe d'eau, tant que le niveau du baſſin reſtera le même; mais quand ce niveau viendra à baiſſer, ſans que la rivière baiſſe dans la même proportion, il eſt encore évident que le

Digitized by Google

canal le plus long opérera le desséchement le plus prompt ; car le premier canal AC pourroit ne plus avoir de pente, tandis que celle du canal AD ne seroit diminuée que de moitié : ainsi, l'effet du premier seroit nul, mais non pas celui du second. On peut faire le même raisonnement pour comparer l'effet du canal AD avec celui du canal AE. Donc il est certain que plus il y aura de différence de niveau entre l'eau du bassin & celle de la rivière, prise au point où aboutit le canal, plus il restera de pente au canal, déduction faite de la hauteur dont l'eau pourra baisser dans le bassin, ou de celle dont elle pourra s'élever dans la rivière par les crues. Ainsi, une crue qui feroit hausser le niveau de la rivière d'une quantité donnée, pourroit anéantir la pente du canal AC, ou même AD, & faire refouler l'eau dans le bassin A, tandis que le canal AE conserveroit encore assez de pente pour continuer de couler. Il faut donc conclure en premier lieu que le canal AE est préférable aux deux autres.

200. Mais on demande en second lieu quelle est la longueur positive qu'il faut donner au canal de desséchement, pour qu'il ne reste jamais d'eau dans le bassin A. On peut dire en général que cette longueur doit être au moins telle, qu'elle aboutisse à un point de la rivière où la surface des plus hautes eaux soit inférieure au fond du bassin, afin qu'en tout tems, même dans les crues d'hiver, l'eau du bassin puisse couler sans interruption, &

Digitized by Google

que celle de la rivière ne puiſſe pas refouler, ni arrêter cet écoulement : au reſte, on ſent déja que l'infériorité de la ſurface de l'eau de la rivière, au point de jonction du canal, ſous le fond du baſſin, & par conſéquent la longueur abſolue du canal, dépendent des dimenſions qu'on lui donnera. Ces dimenſions doivent être réglées ſur la pente qui ſe trouvera depuis le ſol du fond du baſſin, qui eſt cenſé repréſenter la ſurface des plus hautes eaux de l'inondation, à l'entrée du canal, juſqu'à la ſurface de la rivière au point E, dans le tems des crues ; car il eſt néceſſaire que, dans tous les cas, la dépenſe du canal, en vingt-quatre heures, puiſſe égaler le produit d'eau des ſources, des ruiſſeaux & des pluies du ciel, qui s'y rendent dans le même tems.

201. Mais le problême eſt encore indéterminé, & ces données ne ſuffiſent pas ; car on eſt le maître de donner au canal une grande ſection avec moins de pente, ou une moindre ſection avec une pente plus forte ; & comme l'objet du deſſéchement peut être également rempli de bien des manières, il peut n'être pas indifférent de choiſir celle qui peut réunir d'autres avantages, comme de donner lieu à la moindre dépenſe poſſible, ou de procurer une viteſſe de courant plus grande, qui s'approche davantage de la viteſſe du régime, afin de prévenir, ſi l'on peut, l'envaſement du canal & l'entretien auquel il ne peut manquer d'être plus ou moins ſujet. Arrêtons-nous à la condition

Digitized by Google

de la moindre dépenſe poſſible du côté du déblai des terres de l'excavation du canal; & comme les règles ne frappent pas toujours aſſez, ſi elles ne ſont rendues ſenſibles par des exemples, nous allons donner une application des principes précédens, par la ſolution du problême ſuivant.

PROBLÊME.

202. Le produit d'eau en 24 heures d'un baſſin inondé étant donné, la différence de niveau entre le fond de ce baſſin & la ſurface des hautes eaux d'une rivière voiſine étant auſſi donnée, ainſi que la pente de cette rivière; on demande la longueur & la largeur d'un canal d'une profondeur donnée, qui puiſſe tenir en tout tems le baſſin à ſec, en jetant ſes eaux dans la rivière, & dont le cube de l'excavation ſoit le moindre poſſible.

Suppoſons que le baſſin reçoive les eaux qui tombent du ciel dans l'étendue d'une lieue quarrée de ſurface; évaluons cette quantité, pour un jour de forte pluie, à un pouce de hauteur d'eau, & celle des ruiſſeaux & des ſources qui aboutiſſent auſſi dans le baſſin, à un volume d'eau égal à la moitié du précédent; il ſuit que la maſſe d'eau à écouler dans un jour eſt égale à un volume d'une lieue quarrée de baſe, ſur un pouce & demi de hauteur, ce qui fait un produit d'environ 120000 toiſes cubes.

Suppoſons encore que le ſol du fond de cuve

Digitized by Google

du baſſin ſoit plus bas de trois pieds que le niveau des hautes eaux de la rivière en hiver, en comprenant dans ſes accrues celle du canal projeté, quand il y aura ſon écoulement; que la pente de la rivière ſoit de deux pouces pour 100 toiſes, & la profondeur du canal de ſix pieds.

SOLUTION.

La pente de la rivière étant de 2 pouces pour 100 toiſes, ou de $\frac{1}{3600}$, & le canal étant ſuppoſé ſenſiblement parallèle au lit de la rivière, ce n'eſt qu'au delà de 1800 toiſes que la ſurface de la rivière ſera abaiſſée de plus de 3 pieds, & qu'elle ſe trouvera plus baſſe que le fond du marais. Ainſi, le canal ne peut avoir moins de 1800 toiſes de longueur, & ſi on ſe bornoit à lui donner quelques toiſes de plus, ſa pente ſeroit ſi petite qu'il lui faudroit une largeur immenſe pour écouler toute l'eau qu'il eſt ſuppoſé devoir débiter. D'un autre côté, on voit que ſi la pente du canal devenoit preſqu'auſſi forte que celle de la rivière, il ne pourroit la rencontrer qu'à une très-grande diſtance; & cependant ſi on calcule la largeur qu'il devroit avoir avec cette pente, on trouvera qu'elle devroit être de près de 13 pi. Plus on s'éloignera de ces deux extrêmes, plus on diminuera les frais de l'excavation, qu'il eſt très-important de conſidérer dans ces ſortes de travaux. Il faut donc trouver à quelle longueur de canal le déblai eſt un *minimum*.

Digitized by Google

Soient x la la largeur du canal, y sa longueur depuis la prise d'eau du bassin jusqu'à son confluent dans la rivière, h la profondeur de l'eau dans le canal au dessus du fond du marais, q la hauteur dont ce fond est plus bas que la surface de la rivière vis-à-vis le bassin, D la dépense du canal par seconde, & $\frac{1}{a}$ la pente de la rivière; il faut que hxy soit un *minimum*, ou qu'on ait $xdy + ydx = 0$.

La formule ordinaire des vitesses $V = \frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}} - 0,3\,(\sqrt{r}-0,1)$, d'après laquelle on peut trouver les valeurs de y & de dy, est trop compliquée sous cette forme, à cause du logarithme : mais en faisant un apperçu des valeurs qu'on cherche, on verra qu'on peut se servir de la formule simplifiée $V = \frac{\sqrt{Ng}\sqrt{r}}{\sqrt{B}}$, en faisant $\sqrt{Ng} = 275$ environ, valeur qui sera suffisamment exacte pour tous les cas qui en différeront peu, puisqu'alors les vitesses sont sensiblement proportionnelles aux racines quarrées des pentes.

Pour faire entrer ces données dans l'équation, on remarquera que $V = \frac{D}{hx}$; $r = \frac{hx}{x+2h}$. Quant à B, on observera que le canal étant supposé avoir la même longueur que la rivière, depuis la prise d'eau jusqu'au confluent, $\frac{y}{a}$ exprime la pente totale de la rivière, sur la longueur du canal, $\frac{y}{a} - q$ représente celle du canal : or, cette quantité étant

Digitized by Google

divisée par y, donne la valeur de $\frac{1}{B} = \frac{\frac{y}{a} - q}{y}$. Ainsi, l'équation pour le canal devient $\frac{D}{hx} = \sqrt{Ng}\sqrt{\frac{hx}{x+2h}}\sqrt{\frac{\frac{y}{a}-q}{y}}$; d'où l'on tire $y = \frac{Ngqh^3x^3}{\frac{Ngh^3x^3}{a} - D^2(x+2h)}$; & $dy = \frac{3Ngqh^3x^2dx}{\frac{Ngh^3x^3}{a} - D^2(x+2h)} - \frac{Ngqh^3x^3dx\left(\frac{3Ngh^3x^2}{a} - D^2\right)}{\left(\frac{Ngh^3x^3}{a} - D^2(x+2h)\right)^2}$; substituant ces deux valeurs dans l'équation $xdy + ydx = 0$, & réduisant, on a $\frac{Ngh^3x^3}{aD^2} - 3x = 8h$.

Si on résout cette équation, en faisant $Ng = (275)^2$ ou 75625 pouces, $h = 72$ pouces, $\frac{1}{a} = \frac{1}{3600}$, & $D = 518400$ pouces cubes, on aura $x = 392$ pouces, ou 32 pieds 8 pouces; & $\frac{D}{hx}$, ou la vitesse, sera de $18^{po.},36$; mettant ensuite ces valeurs dans la formule rigoureuse des vitesses, on trouvera que la pente du canal, dans ce cas, est égale à $\frac{1}{11664}$, ou de $0,^{po.},6173$ par 100 toises.

Soit l la longueur du canal ou de la rivière, exprimée en toises : celle-ci ayant 2 pouces de pente par 100 toises, sa pente totale sur la longueur l sera $\frac{2l}{100}$; de même la pente totale du canal sera $\frac{0,6173l}{100}$. La différence de ces deux quantités doit être égale à 36 pouces, qui est la différence

différence de niveau entre la rivière & la prise d'eau du canal. On a donc $\left(\frac{2po. - 0po.,6173}{100}\right) l =$ 36 pouces; d'où l'on tire $l = 2604$ toises; & cette longueur, multipliée par la section du canal, donne, pour le massif du déblai, 14177 toises cubes.

203. Pour se faire une idée de l'importance & de l'exactitude de cette méthode, on peut supposer à volonté deux autres largeurs du canal, l'une plus grande, & l'autre moindre que celle qu'on vient de déterminer, comme, par exemple, 42 & 21 pieds. Si on calcule les pentes, & par conséquent les longueurs du canal, qui seront nécessaires alors pour faire la dépense demandée, on obtiendra les résultats exprimés dans le tableau suivant, qui montre plus clairement l'avantage de la solution donnée par l'équation du *minimum*.

LARGEURS du canal.		VITESSES moyennes par secondes.	PENTES du canal.	PENTES sur 100 toises.	LONGUEURS du canal.	DÉBLAIS.
pi.	po	po.		po.		t. c.
42	0	14,285	$\frac{1}{18988}$	0,379	2221	15547
32	8	18,36	$\frac{1}{11664}$	0,6713	2604	14177
21	0	28,57	$\frac{1}{4761}$	1,5123	7381	25833

204. Nous avons résolu le problême avec les conditions qui le rendent le plus simple; on auroit pu le compliquer, en supposant la prise d'eau éloignée de la rivière d'une quantité connue K, & assez considérable pour qu'il ne soit pas permis de la négliger. Soient m & n la pente de la rivière & du canal par 100 toises, & q la différence de niveau de l'une à l'autre, au lieu d'avoir, comme

tout-à-l'heure, $\frac{(m-n)}{100} l = q$, on aura $\frac{m\sqrt{l^2 - K^2} - nl}{100} = q$, d'où l'on tire $l = \frac{100qn + m\sqrt{10000q^2 + K^2(m^2 - n^2)}}{m^2 n^2}$, équation qui se réduit, comme dans le premier cas, à $l = \frac{100q}{m-n}$, lorsque K est assez petit pour être négligé.

Si la rivière faisoit des sinuosités peu irrégulieres, elles ne seroient pas un obstacle à l'exactitude de l'opération : on pourroit alors imaginer une ligne inclinée de manière qu'elle toucheroit la surface de la rivière au milieu de toutes ses sinuosités ; & c'est la direction & la pente de cette ligne qu'on prendroit pour celle de la rivière. Mais si les sinuosités étoient très-irrégulières, & que d'un autre côté, le terrain dans lequel le canal doit être creusé ne suivît pas, à-peu-près, la pente uniforme qui lui convient, dans ce cas l'exactitude rigoureuse du calcul doit être abandonnée, & le tact seul de l'Hydraulicien doit le guider. Il suffit d'avoir indiqué la marche générale, dont il ne faut s'écarter que le moins qu'il est possible.

205. Dans tout ce qui précède nous avons supposé qu'on n'étoit gêné par aucun obstacle qui empêche de prolonger le canal de desséchement aussi loin qu'on le jugera nécessaire ; mais s'il en étoit autrement, & qu'on rencontrât en chemin une rivière ou un canal comme FG, il faudroit supputer avec soin ce que pourroit coûter un aqueduc passant sous cette rivière ou ce canal, &

Digitized by Google

ajouter cette dépenſe à celle du canal AE : ſi cette ſomme n'excédoit pas celle que coûteroit le canal AD, on ſe détermineroit pour le premier, qui auroit l'avantage d'être ſujet à moins d'entretien, à cauſe de la plus grande viteſſe de ſon courant: on pourroit au contraire ſe déterminer pour le moins long, ſi la viteſſe de régime y étoit mieux obſervée. Enfin, il pourroit ſe préſenter des cas où la rivière, qui doit recevoir les eaux du baſſin, ayant fort peu de pente, & le baſſin beaucoup de profondeur, il ne ſeroit guères poſſible d'opérer le deſſéchement complet, à moins de donner au canal une longueur exceſſive, & de ſurmonter beaucoup de difficultés, qui pourroient être de nature à entraîner trop de dépenſes. Des raiſons particulières peuvent d'ailleurs s'oppoſer à la prolongation d'un canal au-delà d'un certain terme. Ainſi, il peut devenir impoſſible de tenir à ſec pendant l'hiver le baſſin & les marais dont on veut procurer le deſſéchement. Si cela étoit, il faudroit bien ſe contenter de donner au canal la plus grande longueur que la nature du local permettroit, & s'attendre à voir tous les hivers les marais couverts d'une certaine hauteur d'eau.

Ce ne ſeroit que vers les mois de mars, avril ou mai, que, le niveau de la rivière devenant plus bas que le fond du baſſin, les eaux pourroient s'écouler tout-à-fait. Si on deſiroit de ſavoir, avant d'entreprendre un canal ſemblable, combien il reſteroit d'eau dans le fond de cuve, lorſque les eaux de

Digitized by Google

la rivière feroient à leur plus grande hauteur, il faudroit, par un nivellement bien exact, s'affurer du rapport qu'il y auroit entre l'eau des plus grandes crues de cette rivière, prife au point du confluent du canal, & le fol le plus bas des terrains inondés du baffin, & ajouter à cette différence la pente néceffaire, pour que le canal, dont la longueur & la fection feroient fuppofées connues, écoulât en un jour autant d'eau que le baffin en recevroit du ciel ou des ruiffeaux qui s'y raffemblent. Par ce moyen, on auroit une connoiffance parfaite de l'effet qu'on en pourroit attendre, & on balanceroit avec précifion l'avantage du defféchement avec les frais de l'exécution.

206. On n'auroit qu'une connoiffance imparfaite des reffources que l'art préfente pour jeter les eaux d'un lac ou d'une inondation dans la mer ou dans une rivière, fi on ignoroit l'effet des accrues des canaux, & en quoi elles diffèrent de celles des rivières. Plufieurs canaux de dérivation ou de defféchement peuvent fe réunir comme les rivières, & mêler leurs eaux, foit qu'ils partent du même baffin, foit qu'ils tirent leur origine de plufieurs baffins, dont les niveaux font différens.

Mais il fe trouve entre les canaux & les rivières, par rapport à leurs accrues, une différence très-remarquable; c'eft que la dépenfe des rivières étant déterminée par des caufes indépendantes de leur fection & de leur pente, il faut de néceffité que la fomme de leurs volumes réunis s'écoule à la

Digitized by Google

fois par leur lit commun, & que, pour cet effet, la profondeur, la pente & la largeur de ce lit s'accommodent & se conforment à cette dépense; au lieu que, dans les canaux, la proximité du bassin d'où ils tirent leur origine, & au dessus du niveau duquel leur surface ne peut s'élever, fait que leur dépense se proportionne à la capacité du lit & à la pente qu'ils ont acquise depuis leur départ de ce bassin. Rendons ceci plus intelligible. Si un canal tire ses eaux d'un bassin, avec une pente d'un pied sur 600 toises, & qu'on tire du même bassin un deuxième canal égal, si l'on veut, au premier, & qui se joigne avec lui à la distance de 600 toises du bassin, l'accrue, de ce second canal ne pourra pas faire gonfler d'un pied les eaux du premier; car si cela étoit possible, il n'y auroit plus de pente dans l'un ni dans l'autre canal, sur cette longueur de 600 toises, & l'eau cesseroit d'y couler, ce qui est absurde. Il faut donc avouer que l'accrue du nouveau canal ne fera gonfler le premier que d'une partie plus ou moins grande de la pente, qui se trouve depuis son origine jusqu'au confluent, tellement que si, au lieu de ne jeter qu'un canal dans le premier, on y en jetoit deux, trois, quatre, ou un plus grand nombre, & toujours à la même distance de 600 toises, l'eau montera à chaque nouvelle accrue, mais elle n'égalera jamais le niveau du bassin, quelque grand que soit le nombre des accrues. Ainsi, à cette distance, l'eau ne peut jamais s'élever d'un pied; mais si la

Digitized by Google

jonction des canaux confluens se faisoit à une distance double, les accrues seroient plus fortes, & pourroient élever les eaux du lit commun de près de deux pieds, qui est la pente qui se trouveroit du bassin au confluent : il est donc impossible que l'accrue augmente dans le même rapport que celle des rivières, à moins que les canaux n'aient une grande longueur, & n'aient déja parcouru beaucoup d'espace, avant de recevoir l'accrue; car si cela est, ils rentrent dans la classe des rivières; comme on va voir par le problême suivant.

PROBLÊME.

207. Un canal étant donné, avec sa hauteur de réservoir, sa pente, sa largeur & sa profondeur; on demande à quelle distance du bassin d'où il est parti il peut recevoir les eaux d'un canal semblable, & faire une dépense d'eau double de celle qu'il faisoit avant cette accrue. On propose la même question pour une accrue double, triple, quadruple, &c.

SOLUTION.

Puisque le canal donné doit faire une dépense double, triple, ou quadruple, &c. il faudra, en supposant son lit rectangulaire, que la hauteur de sa section augmente comme celle d'une rivière qui recevroit un nombre égal d'accrues. Ainsi, on cherchera d'abord, par le problême (123), quelle

Digitized by Google

ſeroit la nouvelle hauteur de ſa ſection après l'accrue, & on retranchera de cette hauteur celle qu'avoit le canal avant l'accrue : alors on pourra conſidérer cette augmentation de profondeur comme un remou ordinaire, dont on cherchera (157) l'amplitude. Ce ſera la diſtance cherchée ; ce qui eſt évident.

Si on ne vouloit augmenter la dépenſe du premier canal que d'une partie de ſa première dépenſe, comme la moitié, le tiers, &c., on chercheroit de même la hauteur de ſection qui répondroit à cette accrue, & on conſidéreroit l'augmentation de hauteur comme un remou, dont l'amplitude fixeroit à quelle diſtance du baſſin devroit être le confluent ; mais le canal affluent n'auroit pas les mêmes dimenſions que le premier, n'ayant à faire qu'une dépenſe de la moitié, du tiers, &c. ; on trouveroit ſes dimenſions par le moyen de ſa dépenſe, ſa pente, & ſa hauteur de réſervoir connues (181).

208. Si donc on dérivoit d'un baſſin quelconque un canal d'une longueur bornée, & qu'on jetât dans ce canal les eaux d'un ſecond, en plaçant le confluent à une diſtance du baſſin qui fût moindre que celle que nous venons de déterminer, on ſe tromperoit groſſièrement ſi on vouloit comparer cette accrue à celles des rivières ; car il eſt clair que les canaux dont nous parlons n'ont point les propriétés des rivières, qu'ils n'ont point de dépenſe propre, & qu'ils dépendent toujours de la pente

Digitized by Google

accidentelle qui se trouve depuis leur origine jusqu'au confluent.

209. On peut appliquer le problême précédent à l'augmentation de dépense qu'on voudroit procurer à un canal déja fait & un peu long, qui seroit trop étroit pour écouler les eaux d'une inondation ou d'un bassin; car au lieu d'augmenter sa largeur sur sa longueur totale, qui peut être considérable, il suffira de creuser un deuxième canal, dont la longueur & la largeur seront calculées d'avance, qui se jetant dans le premier à une distance convenable, augmentera la dépense du premier canal de la quantité dont elle se trouvoit trop petite.

Si au lieu de travailler à corriger les défauts d'un canal trop étroit, on en avoit un à disposer à neuf, pour remplir un objet de dépense d'eau donnée, & que sa longueur totale fût assez grande pour recevoir une ou deux accrues, on gagneroit beaucoup du côté des frais, en ne donnant à la partie inférieure de ce canal que la capacité suffisante pour faire la dépense donnée, avec l'augmentation de profondeur qui résulteroit de ces accrues: par là, toute cette partie du canal se trouvant relevée, le déblai en seroit beaucoup moindre, & on s'en serviroit pour former les digues que l'exhaussement du fond pourroit rendre nécessaires. C'est ainsi que, par une disposition bien entendue, on peut remplir le même objet à beaucoup moins de frais.

210. Je ne dirai qu'un mot des saignées des

Digitized by Google

rivières & des canaux, parce que les problêmes qu'on peut propoſer à leur ſujet ne ſont que l'inverſe des problêmes des accrues ; en effet, ſi on ſaigne les eaux d'une rivière, ou d'un canal qui rentre dans la même claſſe par ſa longueur, en pratiquant un canal de dérivation qui ait la même pente, la même largeur, & la même profondeur, & qui n'y rentre plus, l'eau baiſſera dans les deux lits, en deſſous du point de partage, & ſe fixera à une hauteur, qui ſera à celle qui exiſtoit avant la ſaignée, comme la profondeur d'une rivière, avant une accrue correſpondante, eſt à celle qui s'établit après cette accrue. Ces deux cas ſont abſolument ſemblables, car chaque bras, après le partage, ne débite que la moitié de l'eau du lit ſupérieur, & il conſerve la même pente & la même largeur. Ainſi, ils ſont, l'un à l'égard de l'autre, dans le même état que deux bras, qui, après avoir coulé ſéparément, réuniſſent enſuite leurs eaux dans un même lit.

BIBLIOTHECA BODLEIANA

Digitized by Google

CHAPITRE IX.

De la forme qui convient aux piles des ponts, aux bajoyers des écluſes, & aux bâteaux qui naviguent ſur des rivières étroites. De quelques cauſes qui retardent ou accélèrent la viteſſe des eaux courantes.

211. NOUS avons déja vu (170 & ſuivans) que quand on oblige l'eau à paſſer bruſquement d'un grand baſſin dans un canal reſſerré, elle ne peut le faire ſans former une chûte qui imprime une viteſſe initiale. De même, quand elle eſt forcée de paſſer d'un canal large dans une ouverture plus étroite, elle ne peut le faire ſans augmenter de viteſſe; & la viteſſe, à ſon tour, ne peut devenir plus grande, s'il ne ſe forme à l'entrée du rétréciſſement un gonflement ou un remou, qui donne de la chaſſe à l'eau. Nous avons déterminé (158) la meſure de ce remou; mais ce n'eſt pas aſſez : car ſi l'entrée de ce canal plus étroit n'eſt pas diſpoſée de manière à ſe prêter à l'accélération graduelle de la viteſſe, comme nous en avons fait auſſi voir la néceſſité (170 & ſuivans), & qu'elle ſoit d'une largeur uniforme, il ſe formera, de droite & de gauche, un tournant d'eau, ou un tourbillon, dans lequel le courant s'égare, & revient ſur lui-même;

Digitized by Google

la dépense diminue par l'effet de la contraction, & l'eau vraiment courante forme une courbe qui s'éloigne de chaque bajoyer, en se séparant de celle qui ne fait que tournoyer. La perte de vitesse, ou celle du débit que l'irrégularité de ces mouvemens occasionne, est ce que nous avons exprimé par l'effet de la contraction; & la vitesse moyenne de l'orifice diminue, toutes choses égales d'ailleurs, dans le rapport de $\sqrt{724}$ à $\sqrt{600}$, plus ou moins, selon la disposition qu'on donne à l'entrée du rétrécissement. Ainsi il y a une perte d'environ $\frac{1}{10}$ sur la dépense. Voyons quels peuvent être les moyens de remédier à cet inconvénient, en faisant prendre au courant l'accélération la plus avantageuse.

212. Soit donc une écluse A, destinée à barrer une rivière B par une tenue de poutrelles, ou par une porte tournante, telle qu'en l'ouvrant au besoin, on y puisse faire passer des bateaux, ou rendre à l'eau un libre cours, pour évacuer promptement les eaux du pays. Comme ce n'est que par nécessité qu'on se détermine à faire l'écluse plus étroite que le lit de la rivière, il est clair qu'on doit chercher à la rendre capable de la plus grande dépense possible, quand elle est ouverte, & que, dans cette vue, il faut diminuer la contraction, & faire essuyer à l'eau le moins de choc possible contre la tête des bajoyers : cependant on se contente assez communément de faire à l'amont & à l'aval Fig. 22.

Digitized by Google

de chaque bajoyer un pan coupé, qui remédie bien peu à la contraction; on laiſſe la tête des bajoyers en E & G perpendiculaire à la direction du courant, & le paſſage de l'écluſe eſt d'une largeur uniforme ſur la longueur de ces bajoyers. Cette diſpoſition eſt défectueuſe, comme on peut s'en convaincre, en conſidérant que la viteſſe moyenne du lit B étant uniforme, ou du moins cenſée l'être juſqu'en EG, & l'eau ayant à ce point une hauteur de remou propre à faire accélérer la viteſſe dans le rapport de IH à GE, à-peu-près, on ne peut obtenir le *minimum* de réſiſtance de la part de l'écluſe, & par conſéquent de contraction de la part de l'eau, qu'en faiſant enſorte que le courant conſerve une pente uniforme & réglée ſur la longueur DH, & que les largeurs du paſſage ſoient proportionnelles à l'inverſe des viteſſes que l'eau acquerra en tombant de la hauteur du remou qu'elle a formé en avant. Or, cela indique que les bajoyers doivent former une courbe qui ſe rapporte à la nature de la parabole.

213. Pour déterminer cette courbe on peut faire une ſuppoſition qui, quoique inexacte à la rigueur, ne tire point cependant à conſéquence, dans tous les cas où la longueur du rétréciſſement n'eſt pas très-grande, comparée à la ſection du courant; c'eſt que l'eau coule ſans frottement dans ſon lit, & qu'elle y peut accélérer ſon mouvement avec uniformité. Or, cela ſuppoſé, on ſait que dans le mouvement uniformément accéléré, les viteſſes

Digitized by Google

ſont proportionnelles aux racines quarrées des eſpaces parcourus, ou que ſi les eſpaces ſont repréſentés par les abciſſes d'une parabole, les viteſſes le ſeront par les ordonnées correſpondantes; d'où il ſuit que, ſi dans le cours d'une eau qui accélère ſon mouvement, on connoît deux viteſſes qui répondent aux deux extrémités d'une longueur donnée, il ſera facile de trouver à quelle diſtance ſeroit l'origine du mouvement, ou le ſommet de la parabole : car nommant K le rapport de la plus grande viteſſe à la moindre, m l'eſpace qui les ſépare, & x l'abciſſe qui répond à la plus petite viteſſe des deux, on aura $1 : K^2 :: x : x + m$, ou bien $K^2 - 1 : 1 :: x + m - x : x$; d'où l'on tire $x = \frac{m}{K^2 - 1}$.

Conſidérons à préſent l'écluſe qu'on propoſe d'établir ſur la rivière B. On voit que l'eau qui coulera avec la viteſſe u dans le lit ordinaire au deſſus de l'écluſe, ſera obligée d'accélérer ſon mouvement, en parcourant la longueur des bajoyers, & de paſſer en IH avec une plus grande viteſſe V : or, ces deux viteſſes ſont ſenſiblement l'une à l'autre : : IH : GE, en raiſon inverſe des largeurs. Ainſi on a $\frac{GE}{IH} = K$; & ſi on nomme m la longueur des bajoyers DH, on aura $\frac{m}{K^2 - 1} = x$, ou la diſtance de la tête des bajoyers au ſommet de la parabole, qui repréſente les viteſſes correſpondantes à chaque point de la longueur des bajoyers; d'où il ſuit que pour avoir la largeur du

Digitized by Google

passage entre les bajoyers, à un point quelconque, dont la distance au sommet de la parabole peut être nommée E, on fera la proportion $\sqrt{E}$: $\sqrt{\frac{m}{K^2-1}+m}$: : IH : un quatrième terme, qui sera la largeur cherchée à ce point.

Les deux bajoyers seront donc arrondis suivant les courbes E*b*S*l*,GRSTH, dont la propriété est de se prêter au courant, de la manière la plus propre à faciliter l'accélération proportionnelle de l'eau dans des espaces convenables, & de diminuer ainsi la contraction, autant que la mesure du passage & la longueur des bajoyers le permettent.

L'expérience montre que quand un courant rétréci & gêné dans un passage étroit, vient à se dilater dans un lit plus large, il s'épanouit en formant des arcs qui conviennent à un triangle équilatéral curviligne, dont le côté est égal à la largeur du courant. Ainsi, du centre K, & de l'ouverture KH = HI, on décrira l'arc HL, & son semblable IM.

Fig. 23. 214. Les choses resteroient dans le même état, si, au lieu de jeter le rétrécissement sur les deux bajoyers, on plaçoit dans la rivière une pile LHTSREOPQI; en remarquant néanmoins que le périmètre des deux passages que forme cette pile étant plus grand que celui du passage unique, il y aura un peu plus de frottement, & que la plus grande rapidité du courant se trouvant dans le milieu du lit ordinaire, tandis que la plus petite

Digitized by Google

eſt près des rives, la pile oppoſera plus de réſiſtance, & gênera davantage le courant que ne font les bajoyers de la fig. 22.

215. Mais ſi, en conſervant aux bajoyers la moitié de leur courbure E*opqi*, on faiſoit dans le milieu une pile, dont la courbure fût GRSTHL, & dont les épaiſſeurs ne fuſſent que moitié des épaiſſeurs correſpondantes de la pile précédente, la ſomme des largeurs de paſſage ſeroit la même qu'auparavant, & l'eau n'éprouveroit pas plus de difficulté à paſſer par ces deux ouvertures que par celle de la fig. 23; il paroît au contraire que le choc y ſeroit moindre contre chaque face de la pile, & que cette diſpoſition ſeroit plus avantageuſe. Fig. 24.

216. Si on conſidère les piles tracées ſuivant la méthode précédente, comme des priſmes diſpoſés pour eſſuyer la moindre réſiſtance, & en oppoſer moins à l'eau qui coule à leur rencontre, on pourra croire que les bateaux qui ſont deſtinés à la navigation ſur de petites rivières, & dont le volume fait une partie conſidérable de la ſection du lit, devroient être conſtruits d'après le même principe, enſorte que leurs élémens ou leurs coupes augmentaſſent ſuivant la loi qui règle ces ſections, en raiſon inverſe des viteſſes que l'eau prendroit, en accélérant uniformément ſon mouvement ſur leur longueur. Quoi qu'il en ſoit, il paroît que la forme de ces bateaux doit différer à cet égard de celle des navires qui fréquentent les grandes rivières, & des vaiſſeaux deſtinés à la mer, indépendam-

Digitized by Google

ment des autres considérations qu'on doit avoir en vue pour les derniers. Il paroît que les bateaux dont le volume se rapproche de la capacité du lit d'une rivière ou d'un canal, doivent être plus gros de l'avant, & plus renflés que les autres, & que leur arrière doit être aussi moins effilé, sans que cela nuise à la sensibilité du gouvernail, à cause de la promptitude avec laquelle le fluide se retourne derrière eux, étant renvoyé par la résistance de la rive.

217. Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette matière, qui n'est pas directement de notre sujet; mais nous ne pouvons pas omettre de faire remarquer que la méthode générale de remédier à la contraction peut s'appliquer à toutes les écluses de retenue & de chasse, aux portes d'eau d'entrée & de sortie des villes & places de guerre, aux jetées de l'entrée des ports, aux embouchures des tuyaux de conduite, aux robinets des fontaines, aux entonnoirs, aux buses des soufflets, & généralement à tous les canaux destinés à conduire l'eau, l'air & le feu, & à conserver à ces élémens toute la vitesse possible, en prévenant & empêchant la contraction, autant qu'on peut l'espérer. Il est vrai que nous avons fait abstraction de la petite résistance qui naît du frottement; mais cet élément peut être négligé dans des canaux dont la longueur est bornée.

218. Il faut aussi convenir que la forme aiguë & les angles affoiblis des piles tracées de cette manière, paroissent & seroient en effet peu convenables aux avant-becs

Digitized by Google

avant-becs des ponts établis ſur des rivières conſidérables, où il convient de s'aſſurer contre le choc des glaces & les coups accidentels des bateaux ou des trains de bois qui peuvent les heurter; mais ſi la ſolidité, néceſſaire en ce cas, ne permet pas d'employer le nouveau tracé dans toute ſa préciſion, on peut du moins en conſerver tout ce qui n'y répugne pas, en émouſſant ſeulement la pointe trop aiguë des avant-becs.

219. Il nous reſte à parler d'une autre eſpèce d'obſtacles que rencontre le courant de l'eau, & dont ſon mouvement eſt plus ou moins affecté. D'abord, la préſence d'un bateau en mouvement dans un canal où l'eau eſt dormante, ou d'un bateau en repos dans une eau courante, y donne lieu à une augmentation de frottement, qui, jointe à la difficulté que l'eau éprouve à paſſer par un lit rétréci, occaſionne un remou proportionné. Ce remou, dans les rivières étroites, peut ſe faire ſentir en amont à de grandes diſtances, & il eſt ſujet aux mêmes lois que nous avons indiquées ci-devant. Quand il ſe trouve à la file un grand nombre de bateaux, lors des crues de la rivière, & principalement quand ces bateaux ſont chargés, leurs parois diminuent tellement le rayon moyen du lit, que la ſection eſt forcée de s'élever, ce qui peut cauſer des débordemens & des ruptures de digues, qu'on préviendroit quelquefois, en faiſant emmener ces bateaux dans des lieux où la rivière eſt moins ſujette à déborder.

Digitized by Google

Une autre espèce d'obstacle, moins visible, mais aussi réel, est cette sorte de roseaux qui croît dans le fond des rivières, & dont les feuilles se courbant suivant le fil de l'eau, lui présentent une surface multipliée, qui augmente considérablement la résistance naturelle du lit. Si, par hypothèse, on connoissoit la somme des périmètres de toutes les feuilles qui se trouvent à la fois dans la section d'une rivière, & qu'on l'ajoutât à celui du lit, on pourroit substituer cette somme, dans la formation du rayon moyen, à la place de la paroi ordinaire, exprimée par $l + 2h$, & on auroit un rayon moyen extrêmement diminué, qui, combiné avec la pente, qui reste la même, donneroit une vitesse & une dépense beaucoup trop petites, si la section ne s'élevoit pas assez pour compenser cette augmentation de résistance. Dans les rivières où la dépense est nécessairement la même, malgré cet obstacle, il en résulte donc une plus grande hauteur de courant; mais dans les canaux, sur-tout quand ils sont courts, il en résulte une diminution de dépense, parce que la section ne peut pas s'élever, & que la vitesse diminue à-peu près comme la racine quarrée du rayon moyen. Il est donc d'une extrême conséquence de tenir toujours net & en bon état le lit des rivières, & sur-tout celui des canaux destinés au desséchement.

Dans le tems des fortes gelées, la surface des rivières se couvre de glace, sous laquelle l'eau continue de couler : dans cet état elle éprouve un

Digitized by Google

frottement plus grand qu'auparavant, puiſque la paroi, expoſée au frottement, devient égale à $2l + 2h$, au lieu de $l + 2h$: en ſubſtituant donc cette quantité dans la formation du rayon moyen, on trouveroit la viteſſe qui convient aux rivières priſes; ſur quoi on pourroit demander pourquoi la viteſſe devenant moindre dans ce cas, & la dépenſe étant cenſée la même, la profondeur n'augmente pas, pour compenſer par la ſection ce qui ſe trouve perdu par la viteſſe ? Mais on peut répondre qu'il arrive le plus ſouvent que, dans ces tems de gelée, la dépenſe des rivières diminue réellement par l'effet naturel du froid; car la ſurface de la terre venant à ſe durcir par la rigueur du froid, la filtration intérieure des eaux de pluie, qui forme les ſources, doit être conſidérablement ralentie, de la même manière que l'eau ne deſcend plus dans un tuyau étroit, quand on bouche ſon orifice ſupérieur. Si cette cauſe de la diminution des ſources reſtoit ſans effet, par une ſuite de la nature particulière du terrain, il n'y a point de doute que le niveau de l'eau de la rivière ne hauſſât à meſure que l'eau ſe couvriroit de glace.

Enfin, une dernière cauſe du retardement, ou de l'accélération des eaux courantes, ou de la pente que prennent, ſans couler, celles qui ſont retenues dans des baſſins ou des canaux fermés, eſt l'impreſſion qu'eſſuie leur ſurface de la part des vents. Cette cauſe, ſi petite en apparence, produit des effets ſurprenans, quand elle agit ſur

Digitized by Google

les eaux de la mer. On ſait que les marées ne ſont jamais ſi hautes que quand le flux eſt favoriſé par le vent, & qu'elles diminuent au contraire quand il lui eſt oppoſé : pour ſe faire une idée de l'action du vent ſur l'eau, il faudroit, par une expérience immédiate qui nous manque, connoître le rapport du frottement de l'air à celui de l'eau ; mais comme les denſités de ces élémens ſont à-peu-près dans le rapport de 1 à 850, on peut préſumer que leurs frottemens ſuivent à-peu-près la même proportion, à viteſſes égales. Quoi qu'il en ſoit, il eſt conſtant que les debordemens des rivières augmentent avec la hauteur de leurs eaux, quand le vent ſouffle avec violence dans la direction contraire à leur cours, & qu'ils diminuent au contraire très-ſenſiblement, quand le vent ſouffle dans le ſens du courant.

220. Nous ne pouvons omettre une obſervation qui paroît d'abord plus curieuſe qu'importante, mais qui, étant approfondie, jette beaucoup de lumière ſur notre théorie, & peut d'ailleurs ſervir au progrès de celle de la réſiſtance des fluides; nous la plaçons ici à cauſe du rapport qu'elle a avec le mouvement uniforme de l'eau.

Un corps flottant librement ſur la ſurface d'un courant uniforme, doit y prendre, & y prend en effet une viteſſe uniforme, plus grande que celle du filet du milieu de la ſurface de ce courant. Cette vérité eſt un corollaire aſſez ſimple du principe fondamental du mouvement uniforme, & n'avoit pas beſoin, pour être confirmé, du témoignage

Digitized by Google

de l'expérience que nous en avons faite, & de celui des bateliers accoutumés à la navigation des rivières, qui la connoiſſent depuis long-tems.

Quand un corps quelconque flotte ſur un courant qui a une pente exprimée par $\frac{1}{b}$, il eſt ſitué ſur un plan incliné, & a par conſéquent une force accélératrice égale au produit du poids du volume d'eau qu'il déplace par la fraction $\frac{1}{b}$; cette force tend à le faire deſcendre, & elle accéléreroit ſa deſcente à l'infini, ſi le corps n'éprouvoit pas de réſiſtance: or, ſi on ſuppoſe que ce corps ſe meuve ſeulement avec la viteſſe du fluide qui l'environne & qui le porte, il ſera en repos relativement au fluide, & n'eſſuiera de ſa part aucune réſiſtance. Ainſi, ſa force accélératrice reſtera entière, & lui imprimera de nouveaux degrés de viteſſe, juſqu'à ce que l'excès de ſa viteſſe ſur celle du fluide produiſe un choc qui ſoit égal à cette même force; alors il continuera de ſe mouvoir uniformément, & à chaque inſtant ſa force accélératrice ſera équilibre à la réſiſtance qu'il éprouvera de la part du fluide.

Plus le volume d'eau déplacé par le corps ſera conſidérable, plus la force accélératrice du corps ſera grande, & plus grand auſſi ſera l'excès de la viteſſe uniforme qu'il acquerra ſur celle du fluide; mais, par la raiſon contraire, plus petit ſera le volume d'eau déplacé par le corps, plus ſera petit l'excès de ſa viteſſe uniforme, & enfin, quand le volume d'eau ſera égal en groſſeur à une molécule

Digitized by Google

élémentaire d'eau, sa vitesse sera égale à celle de la molécule elle-même.

221. On peut juger par là qu'indépendamment de la viscosité de l'eau, qui en rend les molécules plus dépendantes les unes des autres, la vitesse d'un filet placé à la surface d'un courant deviendroit toujours uniforme, par la résistance que causeroit l'excès de sa vitesse sur celle du filet inférieur; car il suffit que cette résistance soit égale à la force accélératrice du filet. On en peut dire autant d'une seule molécule considérée abstractivement.

Il suit de-là qu'un corps qui flotte au gré d'un courant bien réglé, se placera toujours de lui-même au milieu de la largeur de ce courant, & en suivra le fil d'eau, sans s'en écarter, parce que c'est le lieu où il éprouve le moins de résistance pour acquérir la plus grande vitesse uniforme qui lui convient; que plus le volume d'eau qu'il déplace est grand, plus il a de penchant à se maintenir dans cette place, & à en écarter des corps moindres que lui; & qu'il n'y a que les sinuosités & les coudes du courant, ou l'action étrangère du vent, qui puisse troubler cet ordre.

Il suit encore de-là que si la surface du courant se trouve chargée d'un grand nombre de corps flottans, sa vitesse doit en être augmentée, & devenir plus grande que si ces corps étoient remplacés par des portions égales d'un fluide homogène. Ainsi la vitesse des rivières qui charient, à la suite des dégels, ou qui sont couvertes de bois

Digitized by Google

flottans, doit être plus grande que dans leur état naturel.

Enfin, une dernière conséquence est que, parmi plusieurs corps qui flottent librement sur un courant bien réglé, & qui déplacent des volumes d'eau égaux entre eux, celui dont la forme est disposée à éprouver moins de résistance pour se mouvoir dans le fluide, acquerra une vitesse uniforme plus grande que tous les autres; tellement qu'on peut parvenir à connoître la résistance absolue d'une sphère, par exemple, en observant le rapport constant de sa vitesse uniforme propre, à celle du courant sur lequel elle flotteroit, y étant entièrement plongée, au moins sensiblement. Car il est clair que cette résistance seroit égale au produit de son volume d'eau par la pente du courant, quantité qu'il faudroit égaler à sa surface multipliée par le quarré de l'excès de sa vitesse sur celle du courant divisé par un nombre constant. Si donc les résistances des corps semblables, mus dans l'eau, sont comme les surfaces de ces corps, & comme les quarrés des vitesses, il suit que deux sphères de diamètres différens, prendroient, en flottant sur un même courant, des vitesses dont les excès sur la vitesse du courant seroient proportionnels à leurs diamètres.

222. Dans un courant uniforme & bien réglé, la surface de l'eau d'une rivière, d'un bord à l'autre, n'est pas terminée par une ligne droite, mais par une courbe convexe; c'est-à-dire que le milieu est

Digitized by Google

plus élevé que les bords. Cet effet dépend de l'inégalité des viteſſes des différens filets qui compoſent la ſection. L'expérience montre, comme nous le ferons voir en parlant de la preſſion que leau exerce contre les parois de ſon lit, que cette preſſion eſt d'autant plus grande que la viteſſe eſt moindre que celle qui eſt due à la force motrice. Ainſi, dans un tuyau horizontal, qui a une certaine hauteur de réſervoir, ſi la viteſſe dans le tuyau eſt forcée de diminuer par quelque obſtacle, comme un rétréciſſement à ſon extrémité inférieure, la preſſion intérieure que l'eau exerce contre les parois augmente à proportion que l'obſtacle rend la viteſſe moindre. De même, en conſidérant la veine fluide d'une rivière comme diviſée en pluſieurs faiſceaux de filets, dont les forces motrices ſont égales, puiſqu'ils ont tous même pente, mais dont les viteſſes ſont d'autant moindres que la paroi eſt plus voiſine, on voit que ceux qui eſſuient par cette cauſe une plus grande perte de viteſſe, doivent exercer une plus grande preſſion dans tous les ſens, que ceux dont la viteſſe perdue eſt moindre; & que la ſomme des faiſceaux qui perdent le plus de viteſſe, eſt plus grande vers les bords du courant que dans le milieu; d'où il réſulte que pour qu'il y ait équilibre entre ces preſſions latérales & inégales, il faut que la ſurface du fluide s'élève vers le milieu du courant, en même tems qu'elle s'abaiſſe vers les bords; mais la flèche que forme cet arc eſt preſque toujours inſenſible, parce que la différence

Digitized by Google

des viteſſes du milieu & des bords n'eſt jamais très-grande, a moins que des cauſes aſſez rares, comme beaucoup de roſeaux vers les bords, & une accrue conſidérable dans le lit, n'augmentent la viteſſe du milieu du courant, & n'anéantiſſent preſque celle des rives.

223. Cette ſurface au contraire peut devenir concave par des cauſes oppoſées, comme il arrive à l'embouchure des fleuves, quand les eaux de la mer y remontent par le flux. Car ces eaux trouvant moins de réſiſtance vers les bords qu'au milieu du fleuve, elles s'y portent plus rapidement, & l'ordre des viteſſes s'y trouvant interverti, une moindre preſſion vers les rives y occaſionne une plus grande élévation du fluide.

Le même effet a lieu momentanément quand un courant ſe trouve ſubitement arrêté par la chûte d'une vanne qui lui ferme le paſſage; on peut alors obſerver un double mouvement dans les eaux ſupérieures & inférieures de la rivière. En amont, le remou produit par le choc du fluide contre la vanne, forme un flot qui remonte contre le courant avec une viteſſe oppoſée & proportionnée à la ſienne, & qui ſe rend plus ſenſible vers les bords, contre leſquels il s'élève avec bruit, ſur-tout s'ils ſont en talud. En aval, le milieu du courant s'élève avec le reſte de la viteſſe précédente, tandis que les bords, où la viteſſe étoit moindre, ſe ſoutiennent quelques inſtans plus elevés. Ainſi, l'affluence de l'eau

Digitized by Google

d'amont, & la fuite de l'eau d'aval, produiſent le même effet, de donner la forme concave à la ſurface du courant que la vanne vient de ſéparer.

Digitized by Google

SECTION IV.

Des conduites d'eau, & du mouvement irrégulier dans les tuyaux.

224. APRÈS avoir considéré dans les trois premières sections de cette première partie le mouvement de l'eau en grandes masses, c'est-à dire tel qu'il a lieu dans les grands canaux formés par la nature même ; après avoir reconnu que les lois générales sont les mêmes pour toutes les proportions de grandeur, & que si la sagesse du créateur s'est jouée dans des œuvres dignes d'elle, l'homme peut à son tour s'exercer dans des ouvrages proportionnés à ses forces, & relatifs à ses besoins ou à ses plaisirs, pourvu qu'il soit fidèle à copier ces grands modèles ; nous allons, dans cette quatrième section, nous occuper du mouvement de l'eau en petites masses, afin qu'à l'aide des règles précédemment établies, ou de celles qu'une observation mieux dirigée fera découvrir encore, les Hydrauliciens puissent, dans leurs divers travaux, approcher de plus en plus de la perfection, en remplaçant une routine aveugle par des principes sûrs, puisés dans la nature.

Les conduites d'eau, soit par des aqueducs ouverts, ou par des tuyaux fermés, vont d'abord

Digitized by Google

nous occuper, & ne préſentent pas de grandes difficultés; mais le mouvement dans les tuyaux deſtinés à fournir des jets-d'eau, dans les conduites compoſées de tuyaux de différens diamètres, & qui diviſent leurs eaux en pluſieurs rameaux, & enfin, dans les corps de pompes ou autres machines hydrauliques, exige des conſidérations particulières, que nous tâcherons de développer avec clarté, & en peu de mots.

CHAPITRE I.

Du mouvement de l'eau dans les aqueducs.

225. LES aqueducs ſont une copie en petit des canaux & des rivières; le fluide qui s'y meut eſt aſſujetti aux mêmes lois: s'ils ſont creuſés dans la terre, leur lit doit avoir la même figure, & être ſoumis au même régime; mais ſi leurs parois ſont en bois ou en maçonnerie, il n'y a plus de régime à obſerver; la figure de la ſection ceſſe d'être néceſſitée; la loi de la ſimplicité, de l'économie, & de la plus grande dépenſe d'eau doit ſeule alors être conſultée, & il faut ſe fixer à la forme rectangulaire, dans laquelle la baſe eſt le double de la hauteur.

Nous ne pouvons donner un exemple de l'application des principes précédens, qui ſoit plus

Digitized by Google

intéreſſant & plus agréable au public que celui du projet de M. de Parcieux d'amener à Paris les eaux de la rivière d'Yvette. Cet Académicien, ſi recommandable par l'utilité de ſes vues, n'avoit eu beſoin que de ſimpes apperçus, pour concevoir la poſſibilité de cette opération, & donner une eſtimation aſſez exacte de la dépenſe.

Il propoſoit de prendre les eaux de l'Yvette à environ 18000 toiſes de Paris, & de les conduire par un canal ouvert, qui devoit paſſer ſous terre dans quelques parties, & être porté dans d'autres par des arceaux, pour traverſer les vallons : ce canal, ou aqueduc rectangulaire, revêtu en maçonnerie dans tout ſon pourtour, devoit avoir 7 à 8 pieds de largeur, ſur 2 ou 3 de profondeur. On voit déja que ces dimenſions ne ſont pas dans le rapport le plus avantageux, & nous allons montrer d'ailleurs qu'elles ſont trop conſidérables, d'après les données de M. de Parcieux. Nous ne faiſons pas ces remarques pour critiquer le diſpoſitif de l'Inventeur, mais pour faire ſentir que les plus grands talens de l'Artiſte doivent emprunter de la théorie une marche aſſurée, qui ne laiſſe rien à l'incertain, & qui évite les à-peu-près que la prudence oblige, dans le doute, de forcer toujours un peu, pour aſſurer la réuſſite d'un projet. Il a meſuré que l'Yvette & le Gif pouvoient fournir 1200 pouces d'eau dans les tems les plus ſecs, de ſorte que les eaux, à leur moyenne hauteur, donnoient une dépenſe de 16 à 1800 pouces d'eau ; il eſtimoit

Digitized by Google

que, depuis la prise d'eau jusqu'à l'arrivée actuelle des eaux d'Arcueil, où il faisoit aboutir son canal, il se trouvoit une pente d'environ 50 pieds; mais nous ne compterons ici que sur 30, parce qu'il en falloit 5 pour un filtre de gravier, à travers lequel les eaux devoient passer avant d'entrer dans Paris, & que nous supposons les 15 autres pieds employés à vaincre la résistance des coudes indispensables, à fournir des augmentations de pente dans plusieurs parties, & à compenser les erreurs qu'il peut y avoir dans le nivellement.

Il s'agit donc de chercher les dimensions d'un canal rectangulaire qui fournisse environ 1700 pouces d'eau, avec une pente de 30 pieds sur 18000 toises, ou de $\frac{1}{3600}$: or, d'après notre formule, on trouvera qu'en supposant la section de 8 pieds quarrés, ayant 4 pieds de largeur sur 2 de hauteur, la vitesse moyenne seroit de $16^{po},8$, ce qui donne une dépense de $11^{pi.},2$ cubes par seconde; & en prenant l'évaluation la plus ordinaire du pouce d'eau, de 14 pintes par minute, la pinte de 36 au pied cube, chaque pied cube par seconde revient à $154\frac{2}{7}$ pouces d'eau, & la dépense totale à 1728 pouces d'eau. Ainsi, au lieu des dimensions fixées par M. de Parcieux, il suffiroit d'avoir un canal de 4 pieds de largeur sur 3 pieds de hauteur, dans lequel l'eau se tiendroit ordinairement à 2 pieds de profondeur; il resteroit un pied de hauteur pour les crues extraordinaires.

On peut voir tous les avantages de ce projet

Digitized by Google

dans trois mémoires de ſon Auteur, inſérés parmi ceux de l'Académie des Sciences pour les années 1762, 1766 & 1767. Nous allons l'examiner ſous un autre point de vue, d'après un Mémoire de M. Perronet, qu'on trouve dans le même recueil, année 1775.

M. de Parcieux avoit en vain pourſuivi juſqu'à ſa mort l'exécution de ſon projet; ce ne fut qu'en 1769 que le Gouvernement chargea MM. Perronet & Chezy d'en faire tous les détails eſtimatifs & préliminaires. Ces Ingénieurs ont exécuté avec préciſion le plan & le nivellement de l'Yvette & de tous les ruiſſeaux adjacens, ce qui leur a donné le moyen de rectifier les premières vues; ils ont vu qu'on pourroit ſans inconvénient prendre 450 pouces d'eau de la Bièvre, dans le tems des ſécheresſes, de ſorte qu'on peut ſe procurer 2000 pouces d'eau pendant la plus grande partie de l'année. La dépenſe totale pour amener à Paris cette quantité d'eau, eſt eſtimée à 7826209 liv. Nous n'examinerons point la poſſibilité de recouvrer cette ſomme par la vente détaillée de quantité de filets d'eau aux particuliers; nous n'avons en vue que d'examiner ce travail par rapport aux dimenſions du canal; nous ajouterons ſeulement que c'eſt par les ſoins de M. de Trudaine qu'on a placé 222 bornes de grès, qui fixent invariablement la direction & le nivellement du fond du canal.

Les nouvelles meſures ont fait connoître que l'aqueduc de l'Yvette auroit 17352 toiſes de lon-

Digitized by Google

gueur, dont 15141 à découvert, & le reste en 15 parties passant sous terre, non compris 2809 toises pour conduire les eaux de la Bièvre dans l'aqueduc principal. M. Perronet exhausse de 6 pieds la prise d'eau fixée par M. de Parcieux, afin de procurer de l'eau à l'Estrapade, quartier le plus élevé de Paris, & qui en manque totalement. La pente totale, depuis cette prise d'eau jusqu'au bouillon d'Arcueil, a été trouvée de 48 pi. 0 po. 9 li.

D'après ces données, on a réglé la pente générale du canal à 15 pouces par mille toises, mais dans les souterrains & les parties de l'aqueduc élevées au dessus de terre, la pente seroit augmentée, afin de réduire la largeur. Les dimensions générales du canal ont été réglées, pour la partie supérieure de l'Yvette, à 4 pieds de largeur dans le fond, 5 dans le haut, sur 5 de hauteur, le tout dans œuvre, & un pied de plus de largeur après la jonction des eaux de la Bièvre.

« La vitesse de l'eau, dit M. Perronet, dans » l'aqueduc, dont la pente aura été réglée sur le » pied de 15 pouces par 100 toises, sera, d'après » des expériences que nous avons faites, d'en- » viron un pied par par seconde. Si l'on suppose » que l'eau ne s'élève ordinairement que de 3 pi. » 6 po. dans cet aqueduc, il passera 18 pi. 8 $\frac{3}{5}$ » pouces cubes par seconde, dans la partie la plus » large, ce qui donnera 2840 pouces d'eau, & » c'est à-peu-près la quantité que pourront

» fournir

» fournir toutes les eaux, dans le tems où elles se-
» le rontplus abondantes. »

Pour vérifier ce résultat par notre formule, on remarquera que la pente de 15 pouces pour 1000 toises se réduit à $\frac{1}{4800}$; que la section ayant 5 pieds de base, & $3\frac{1}{2}$ de hauteur, avec un talud au $\frac{1}{10}$, forme une surface de 2696,4 pouces quarrés, dont les parois sont de 144,4 pouces. D'après ces données, on trouvera une vitesse de 18po.,1 par seconde, & une dépense de moitié en sus plus forte que celle qu'on peut obtenir, ce qui indique que les dimensions fixées par M. Perronet pourroient être réduites.

Pour trouver celles qui seroient les plus convenables, nous supposerons une section rectangulaire avec la base double de la hauteur, & nous prendrons pour la plus grande dépense possible 3000 pouces d'eau. En nommant x la largeur en pouces, on aura $\frac{1}{2}x^2$ pour la section, & $\frac{1}{4}x$ pour le rayon moyen. Pour avoir l'expression de la vitesse, il faut observer que si $154\frac{2}{7}$ pouces d'eau répondent à une dépense d'un pied cube par seconde; 3000 pouces valent $19\frac{4}{9}$ pieds cubes, ou 33600 pouces cubes aussi par seconde, & la valeur de la vitesse moyenne exprimée en pouces est $\frac{33600}{\frac{1}{2}x^2}$. Ainsi, d'après la formule, on a $\frac{33600}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{297(\frac{1}{2}\sqrt{x}-0,1)}{\sqrt{4800}-\text{L.}\sqrt{4800}} - 0,3(\frac{1}{2}\sqrt{x}-0,1)$; d'où l'on tire $x^2(\sqrt{x}-0,1) = 32092$, & $x = 64$ pouces, à très-peu-près. Si on

veut conſerver aux côtés intérieurs de l'aqueduc le talud au dixième, comme le propoſe M. Perronet, on peut, ſans erreur ſenſible, regarder la valeur de x comme une largeur moyenne, & faire la baſe de 5 pieds en nombre rond : mais comme les eaux, quand elles ſont les plus abondantes, ne peuvent s'élever que de 32 pouces, il n'y a pas de néceſſité de donner à l'aqueduc plus de 3 pieds 6 pouces de profondeur, d'autant mieux que ſi on craignoit une trop grande abondance d'eau dans les crues extraordinaires, on pourroit établir à l'origine du canal un reverſoir qui feroit écouler le trop plein des eaux dans l'ancien lit de l'Yvette. Il ſeroit peut-être utile de diminuer la largeur, en augmentant la hauteur que nous venons de déterminer, afin d'économiſer ſur les fondations, & le maſſif des maçonneries. En total la réduction des dimenſions fixées par M. Perronet, ſans nuire au ſuccès du projet, peut en faciliter l'exécution, & en diminuer la dépenſe. Nous nous bornons à ce ſeul exemple pour abréger, & paſſer aux tuyaux de conduite.

CHAPITRE II.

Du mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.

226. LE tableau de comparaiſon des réſultats de notre théorie avec ceux de quantité d'expériences

Digitized by Google

ſur les tuyaux (55), montre aſſez évidemment qu'on connoît la relation entre la viteſſe moyenne, la hauteur de réſervoir, le diamètre & la longueur d'un tuyau de conduite : la régularité & la ſimilitude de la ſection des tuyaux circulaires & fermés ſembleroit devoir ſimplifier leur calcul, & en rendre les réſultats moins compliqués que ceux des rivières ; & cela arriveroit en effet, ſi on faiſoit abſtraction de la charge néceſſaire pour imprimer la viteſſe ; mais comme cette charge fait ordinairement partie de la hauteur du réſervoir, qui, avec le diamètre & la longueur du tuyau, ſont les données communes, il reſte quelque difficulté à cet égard, que les problêmes ſuivans vont applanir.

PROBLÊME.

227. Connoiſſant la hauteur de réſervoir, la longueur & le diamètre d'un tuyau de conduite ; déterminer ſa dépenſe.

Soient H la hauteur du réſervoir, & L la longueur développée du tuyau : le diamètre étant connu, on en déduira ſon rayon moyen, qui en eſt toujours le quart ; & il ſuffira de déterminer la viteſſe moyenne V, pour en conclure la dépenſe cherchée ; la hauteur due à la viteſſe moyenne eſt $\frac{V^2}{2G}$, comme on l'a vu ci-devant (9). Ainſi, la pente fictive du tuyau, exprimée par $\frac{1}{b}$, eſt égale à

$\frac{H-\frac{V^2}{2G}}{L}$; de ſorte que $b=\frac{L}{H-\frac{V^2}{2G}}$; mais cette valeur étant miſe dans la formule $V=\frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{b}-L.\sqrt{b+1,6}}-0,3(\sqrt{r}-0,1)$, celle de la viteſſe devient extrêmement compliquée.

228. Pour éluder cette difficulté, on peut avoir recours à une approximation, en obſervant, 1°. que la hauteur due à la viteſſe eſt ordinairement très-petite, en comparaiſon de la hauteur entière du réſervoir; 2°. que dans un même lit les réſiſtances ſont ſenſiblement proportionnelles aux quarrés des viteſſes, quand celles-ci diffèrent peu entre elles. On ſuppoſera donc $b=\frac{L}{h}$, en prenant par apperçu pour h une quantité un peu moindre que H, & on calculera la viteſſe moyenne v, qui lui eſt relative: ſi la ſomme $h+\frac{v^2}{2G}$ ſe trouve égaler H, on aura trouvé d'abord la véritable viteſſe; mais ſi ces quantités diffèrent, on fera la proportion ſuivante, $h:\frac{v^2}{2G}::H-\frac{V^2}{2G}:\frac{V^2}{2G}$, qui ſe réduit à celle-ci $h+\frac{v^2}{2G}:v^2::H:V^2$. Cette méthode donne toute la préciſion qu'on peut deſirer; & c'eſt elle dont nous nous ſommes ſervis pour calculer toutes les expériences ſur les tuyaux, rapportées dans le tableau géneral (55).

229. Si la conduite faiſoit un certain nombre de ſinuoſités connues, une partie de la charge ſeroit employée à vaincre cette réſiſtance, qui

Digitized by Google

ſeroit encore proportionnelle au quarré de la viteſſe. On pourra exprimer par $\frac{V^2}{m}$ cette quantité que nous avons déterminée ci-devant (105) pour une ſeule bricole, en y faiſant entrer le nombre & la nature des bricoles. Alors la charge, qui ſera équilibre à la réſiſtance des parois, ſera $H - \frac{V^2}{2G} - \frac{V^2}{m} = H - V^2\left(\frac{1}{2G} + \frac{1}{m}\right)$; & la proportion précédente deviendra celle-ci : $h : v^2\left(\frac{1}{2G} + \frac{1}{m}\right) :: H - V^2\left(\frac{1}{2G} + \frac{1}{m}\right) : V^2\left(\frac{1}{2G} + \frac{1}{m}\right)$; & on aura de même $h + v^2\left(\frac{1}{2G} + \frac{1}{m}\right) : v^2 :: H : V^2$

PROBLÊME.

230. Connoiſſant la hauteur de réſervoir, & la longueur d'un tuyau de conduite ; on demande quel doit être ſon diamètre, pour obtenir une dépenſe donnée.

Le rayon moyen étant toujours le quart du diamètre, ſi c exprime le rapport de la circonférence du cercle au diamètre, $4cr^2$ exprimera la ſection du tuyau ; & ſi on diviſe la dépenſe D par cette quantité, $\frac{D}{4cr^2}$ ſera la viteſſe moyenne de l'eau dans le tuyau. Maintenant, ſi on diviſe la longueur du tuyau par la hauteur du réſervoir un peu diminuée, on aura la valeur de b, d'où on conclura à très-peu-près celle de $\sqrt{b} - L.\sqrt{b + 1,6}$, ou $\sqrt{B}$: alors la formule ordinaire devient $\frac{D}{4cr^2} =$

Digitized by Google

$\frac{\sqrt{ng}(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{B}} - 0,3(\sqrt{r}-0,1)$, qui se réduit, en négligeant le dernier terme, & la quantité 0,1 à $\frac{D^2B}{16c^2ng} = r^5$, ou $r = \left(\frac{D\sqrt{B}}{4c\sqrt{ng}}\right)^{\frac{2}{5}}$. Il est vrai que cette opération rend le rayon moyen un peu trop petit; mais il sera aisé de le rectifier; car l'équation précédente fait voir que, quand deux tuyaux ont même longueur & même hauteur de réservoir, les quarrés de leurs dépenses sont entre eux sensiblement comme les cinquièmes puissances des rayons moyens ou des diametres. On pourra donc, d'après ce rapport, rectifier le rayon moyen que l'équation aura donné, & l'on obtiendra le diamètre presque aussi exactement, & bien plus simplement que par la résolution d'une équation composée du cinquième degré. Voici un exemple de cette approximation.

231. Supposons un réservoir élevé de 20 pieds au dessus du point où on veut amener les eaux, & qui en peut fournir 10 pieds cubes par minute; le tuyau doit avoir 600 toises de longueur; on demande le diamètre qu'il faut lui donner.

La dépense par seconde, ou $D = 288$ pouces cubes; & si on retranche, par exemple, un pouce de la hauteur du réservoir, pour celle qui est due à la vitesse, on aura $\frac{1}{b} = \frac{239}{43200} = \frac{1}{180,75}$, d'où l'on déduit $\sqrt{b} - L.\sqrt{b} + 1,6$, ou $\sqrt{B} = 10,844$. Ainsi on aura $r = \left(\frac{D\sqrt{B}}{4c\sqrt{ng}}\right)^{\frac{2}{5}} = 0,931$, & $\sqrt{r} - 0,1 = 0,8648$: or, si on calcule exactement la vitesse &

Digitized by Google

la ſection relatives à ce rayon moyen, on trouvera l'une de 23po.,517, & l'autre de 10,896424, dont le produit donne une dépenſe de 256,25, au lieu de 288. Ainſi le rayon moyen eſt trop foible. Pour le rectifier, on fera la proportion ſuivante : $\overline{256,25}^{\frac{2}{5}} : \overline{288}^{\frac{2}{5}} :: 0,931$: un quatrième terme, qui ſera le rayon moyen très-approché ; & calculant cette proportion par les logarithmes, on trouve celle-ci : 9,1902 : 9,6329 :: 0,931 : 0,9758. Ainſi, le diamètre du tuyau devient 3po.,9032, ou 3 po. 10 li. $\frac{5}{6}$; en calculant la viteſſe & la ſection qui répondent au rayon moyen 0po.,9758, qu'on vient de trouver, on a V = 23po.,724, & la ſection 11po.,97 quarrés, dont le produit donne la dépenſe 283,976, qui, à la vérité, eſt encore un peu foible, mais qui deviendroit trop grande, ſi on augmentoit le diamètre de $\frac{1}{35}$ de ligne. On auroit obtenu une approximation plus exacte, ſi, ſachant par apperçu que le rayon moyen doit être environ 0po.,9, & qu'il doit être diminué de 0,1 dans le calcul exact de la viteſſe, ce qui le réduit de $\frac{1}{9}$, on avoit, pour compenſer l'erreur qu'on commet en négligeant cette quantité, diminué la valeur de $\sqrt{ng}$, à-peu-près dans le même rapport, en la faiſant de 270, au lieu de 297. Dans ce cas, on auroit trouvé d'abord $r = 0,9674$, la viteſſe 23po.,92, l'aire du tuyau 11po.,7604, la dépenſe 281po.,3 ; & aprés la rectification, on auroit eu $r = 0$po.,9765, le diamètre 3po.,906, la viteſſe

Digitized by Google

24po.,05, l'aire du tuyau 11po.,98, & la dépenſe 288,1 pouces cubes.

232. On ſent bien au reſte qu'on doit toujours donner au tuyau de conduite un diamètre un peu plus grand qu'il n'eſt fixé par le calcul, à cauſe des dépôts terreux dnnt l'eau ſe dépouille, & qui, au bout de quelque tems, diminuent ſa capacité. Cette précaution eſt d'autant plus néceſſaire, que ce tuyau fait un plus grand nombre de ſinuoſités dans le ſens vertical.

Pluſieurs Auteurs ont traité des moyens de raſſembler les eaux, d'établir les conduites, & ont marqué les précautions néceſſaires pour les entretenir; nous n'inſiſterons ici que ſur la néceſſité d'obvier aux dépôts terreux & aux engorgemens de l'air, qui diminuent conſidérablement les dépenſes. Il convient que la priſe d'eau au réſervoir ne ſoit trop voiſine ni du fond ni de la ſuperficie conſtante du réſervoir, afin d'en écarter les matières hétérogènes plus peſantes ou plus légères que l'eau. Il ſeroit bon auſſi d'augmenter le diamètre des tuyaux à l'endroit des coudes inférieurs, tandis qu'on placeroit des ventouſes aux coudes ſupérieurs, pour faciliter l'évacuation de l'air qui s'y cantonne. Pour empêcher l'entrée de cet air dans les tuyaux, il faut, autant qu'il eſt poſſible, placer les robinets deſtinés à ſuſpendre l'écoulement de l'eau, vers la partie inférieure, où l'eau ſe dégorge, afin que les tuyaux reſtent conſtamment pleins d'eau.

Digitized by Google

Nous n'entrons pas dans les menus détails de conſtruction, ni dans l'examen de la manière d'employer & de placer les tuyaux de conduite, ſelon la matière dont ils ſont compoſés, bois, fer coulé, plomb, terre cuite. Les fontainiers ont ſur ce ſujet des pratiques fort ingénieuſes, que l'expérience a perfectionnées, & que la théorie pourroit rendre encore plus parfaites. Ce ſeroit rendre au public un ſervice aſſez important, de raſſembler dans un ſeul ouvrage les manipulations qui ont pour objet le ciment des chapes, la poſe des différens tuyaux, la manière de les emboîter ou de les aſſembler, le maſtic qui doit en recouvrir les joints, la manière de les renouveler, l'extraction des queues de renard, les précautions pour s'en préſerver, la conſtruction des aqueducs, des châteaux d'eau, des réſervoirs. Tous ces détails ne peuvent être traités ici.

233. La longueur d'un tuyau & la hauteur du réſervoir ſont ordinairement données par les circonſtances locales; mais ſi elles ne l'étoient pas, & qu'on connût les autres élémens, il ſeroit aiſé de les déterminer. En effet, quand on connoît la dépenſe, le diamètre du tuyau, & par conſéquent la viteſſe, on peut déterminer la pente, & d'après cela on a $L = \left(H - \frac{V^2}{2G}\right)b$, & $H = \frac{L}{b} + \frac{V^2}{2G}$.

Après avoir conſidéré le mouvement qui a lieu quand le réſervoir reſte conſtamment plein, examinons ce mouvement lorſque le réſervoir ſe vide.

Digitized by Google

PROBLÊME.

234. Connoiſſant l'étendue d'un réſervoir priſmatique, qui ſe vide par un tuyau de conduite, dont le diamètre, la longueur & la hauteur primitive du réſervoir ſont données; on demande la relation entre la dépenſe & le tems.

Les expériences ſur les dépenſes des réſervoirs qui ſe vident par un orifice, prouvent, comme on le verra dans le chapitre ſuivant, qu'à chaque inſtant les viteſſes à l'orifice ſont ſenſiblement comme les racines quarrées des charges : on peut donc croire, par analogie, que les viteſſes dans de longs tuyaux, aſſujetties à des charges variables, ſuivent à chaque inſtant les lois du mouvement uniforme & conſtant : mais pour éluder les difficultés que préſente l'équation rigoureuſe des viteſſes, nous nous ſervirons de la formule ſimplifiée $V = \frac{\sqrt{Ng}\,(\sqrt{r} - 0,1)}{\sqrt{b}}$, dans laquelle on connoîtra V & $\sqrt{b}$ pour une charge quelconque, d'après le premier problême de ce chapitre; mais comme la quantité $\sqrt{Ng}$ varie un peu à meſure que le réſervoir ſe vide, il faudra la conclure d'après une hauteur de réſervoir telle que ſa racine quarrée ſoit moyenne proportionnelle entre celles de la hauteur primitive & de la hauteur finale. Cette préparation étant ſuppoſée, ſoient H la hauteur primitive du réſervoir, x la quantité dont ſa ſuperficie s'eſt abaiſſée pendant un tems quelconque t, exprimé en

Digitized by Google

ſecondes, A l'aire ou la ſurface du réſervoir, & a l'aire du tuyau. On remarquera que, pour la hauteur $H-x$, la formule ſimplifiée peut ſe transformer en celle-ci : $V=\frac{\sqrt{Ng}(\sqrt{r}-0,1)}{\sqrt{\frac{L}{(H-x)-\frac{V^2}{2G}}}}$; d'où l'on tire $V=\frac{\sqrt{H-x}}{\sqrt{\frac{L}{Ng(\sqrt{r}-0,1)^2}-\frac{1}{2G}}}$; & en repréſentant par $\sqrt{M}$ la quantité ſenſiblement conſtante $\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{Ng(\sqrt{r}-0,1)^2}-\frac{1}{2G}}}$, on a $V=\sqrt{M(H-x)}$. Or, cette viteſſe peut être conſidérée comme uniforme pendant le tems infiniment petit dt ; ainſi $adt\sqrt{M(H-x)}$ ſera la dépenſe du tuyau & du réſervoir ; & en diviſant cette quantité par l'aire du réſervoir, on aura l'expreſſion de l'abaiſſement dx de ſa ſuperficie pendant cet inſtant. Ainſi $dx=\frac{a}{A}dt\sqrt{M(H-x)}$; d'où l'on tire $dt=\frac{Adx}{a\sqrt{M(H-x)}}$, & en intégrant, $t=\frac{-2A\sqrt{H-x}}{a\sqrt{M}}+c$. Pour déterminer la conſtante & completter l'équation, nous ſuppoſerons qu'à la fin du tems t on aura $x=h$; & on voit d'ailleurs que $t=0$ lorſque $x=0$. On a donc $0=\frac{-2A\sqrt{H}}{a\sqrt{M}}+c$, ou $c=\frac{2A\sqrt{H}}{a\sqrt{M}}$: on a donc auſſi, pour la valeur complette du tems, $t=\frac{2A}{a\sqrt{M}}(\sqrt{H}-\sqrt{H-h})$; d'où l'on tire auſſi

Digitized by Google

$h = H - \left(\sqrt{H} - \frac{at\sqrt{M}}{2A}\right)^2$. Au reste ces formules seront d'autant plus exactes, que H sera plus grand relativement à h; & si cette dernière quantité étoit considérable, on la diviseroit en plusieurs parties, pour chacune desquelles on trouveroit le tems; & la somme de ces tems donneroit la solution du problême.

235. On pourroit compliquer ce problême, en supposant qu'à mesure que le réservoir se vide, il reçoit constamment une certaine quantité d'eau, qui tend à élever sa superficie avec une vitesse par seconde qui seroit exprimée par v; dans ce cas. $adt\sqrt{M(H-x)}$ représenteroit toujours la dépense du tuyau pendant un instant; mais le volume d'eau qu'il y auroit de moins dans le réservoir seroit exprimé par $adt\sqrt{M(H-x)} - Avdt$; & on auroit $dx = dt\left(\frac{a}{A}\sqrt{M(H-x)} - v\right)$; d'où l'on tire $dt = \frac{dx}{\frac{a}{A}\sqrt{M(H-x)} - v}$: en intégrant cette quantité, on trouve $t = \frac{2A\sqrt{H-x}}{a\sqrt{M}} - \frac{2A^2v}{a^2M} - \frac{2A^2v}{a^2M}\log.\left(\frac{a\sqrt{M}\sqrt{H-x} - v}{A}\right) + c$; faisant t & $x = 0$, pour trouver la constante, & completter l'équation, elle se réduit à $t = \frac{2A}{a\sqrt{M}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H-h}\right) + \frac{2A^2v}{a^2M}\log.\left(\frac{a\sqrt{M}\sqrt{H} - Av}{a\sqrt{M}\sqrt{H-h} - Av}\right)$.

Digitized by Google

236. Ce dernier cas peut s'appliquer à l'effet des fontaines intermittentes, qui coulent & tariſſent dans des tems périodiques & réglés, comme quelques heures ou quelques jours. D'après l'explication ingénieuſe qu'en a donnée M. Deſmarets, il faut imaginer un ſyphon, dont la plus courte branche ſoit plongée dans l'eau d'un réſervoir qui reçoit une certaine quantité d'eau, moindre que celle que peut dépenſer le ſyphon, avec une charge égale à la différence de niveau des extrémités des deux branches : l'eau du réſervoir montant juſqu'à la partie la plus élevée du ſyphon, commence à s'écouler par la plus longue branche, mais le réſervoir perdant plus qu'il n'acquiert, ſa ſuperficie s'abaiſſe, & l'écoulement ceſſe lorſqu'elle ſe trouve au deſſous de la branche qui y eſt plongée : alors le ſyphon ſe remplit d'air, & l'eau ne peut recommencer à y couler, que quand la ſource a élevé l'eau du baſſin juſqu'au niveau du haut du ſyphon. La courbure qu'on remarque dans certaines couches de la terre eſt très-propre à donner la forme d'un ſyphon aux voies ſouterraines de l'eau des fontaines, & à produire l'effet que nous venons d'examiner. Une pareille fontaine artificielle pourroit même être utile dans la pratique, pour raſſembler, dans un tems aſſez court, toute l'eau que fournit lentement une ſource ſituée à une certaine diſtance.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

Du mouvement de l'eau au passage d'un orifice.

237. NOUS avons donné dès le commencement de cet ouvrage des notions générales des effets de la contraction d'orifice ; & ce que nous en avons dit est suffisant pour déterminer, dans la pratique, la dépense d'un orifice dont on connoît le diamètre & la charge ; il eût été alors déplacé d'entrer dans la recherche des effets du frottement contre les bords de l'orifice, que nous avons confondus avec ceux de la contraction : mais quoique cette résistance puisse presque toujours être négligée, ses effets, néanmoins deviennent sensibles pour les ajutages minces des jets-d'eau, sur-tout lorsque la gerbe est étroite & élevée ; car la hauteur naturelle du jet, qui n'est pas diminuée par la contraction, peut l'êttre sensiblement par d'autres causes, dont la principale est le frottement contre les bords de l'ajutage. Ceci demande d'être approfondi.

238. Newton semble avoir indiqué le premier l'effet de la contraction ; mais c'est à M. l'Abbé Bossut qu'on en doit une connoissance plus exacte : il a traité ce sujet avec une précision vraiment étonnante, & qui ne laisseroit rien à desirer, s'il avoit

Digitized by Google

pu varier & multiplier davantage ſes expériences. Le moyen de déterminer l'effet de la contraction le plus ſimple en apparence, eſt de meſurer immédiatement le diamètre de la veine contractée; mais c'eſt peut-être le moins exact, parce qu'on opère ſur un corps fluide. Le compas de groſſeur, dont on ſe ſert pour cette meſure, ne peut pas à la vérité pénétrer dans l'intérieur de la veine, ſans qu'on n'en ſoit averti par le jailliſſement de l'eau; mais en revanche, rien ne rectifie la vue, ſi les branches du compas ſont un peu trop écartées. D'ailleurs, les pointes du compas, aſſez émouſſées pour que la vue puiſſe s'y fixer, ne peuvent-elles pas attirer un peu les filets d'eau qu'elles ſont ſur le point de toucher? Tout porte donc à croire que ce moyen doit donner le diamètre de la veine trop grand. Ainſi, quoique M. l'Abbé Boſſut conclue aſſez exactement le rapport de l'aire de la veine contractée à celle de l'orifice : : 2 : 3, ou : : 1 : 1,5, par ſes expériences ſur la meſure immédiate des diamètres, nous pouvons, avec plus de certitude, conclure de celles qu'il a faites en même tems ſur les dépenſes des orifices, une plus grande diminution dans la veine.

239. Il eſt certain que, ſi au paſſage de l'orifice, les filets n'éprouvoient ni contraction ni aucune réſiſtance quelconque, les dépenſes ſeroient égales au produit de l'aire entière de l'orifice par la viteſſe moyenne due à la hauteur de la charge. Or, la réſiſtance produite par un orifice mince, doit être

Digitized by Google

bien peu ſenſible, ainſi le rapport des dépenſes réelles aux dépenſes naturelles ou ſans contraction, devroit être ſenſiblement : : 1 : 1,5, tandis qu'il eſt en effet : : 1 : 1,617 & plus.

Si on pouvoit être aſſuré de la meſure immédiate de la veine contractée, la différence entre ces rapports prouveroit que les viteſſes des différens filets de cette veine ne ſont pas toutes égales, ni dues à la hauteur de la charge ; mais la hauteur des jets-d'eau, qui indique l'intenſité de la viteſſe moyenne, fait voir qu'elle eſt à-peu-près due à la hauteur entière, ſauf les différentes réſiſtances que le jet éprouve ; d'où il faut conclure que les viteſſes à la veine contractée ſont ſenſiblement égales, & que la différence des réſultats vient des erreurs inévitables dans la meſure immédiate de la veine. M. l'Abbé Boſſut en conclut le rapport ſimple de 1 à 1,6, ou de 5 à 8, qui eſt, à la vérité, très-ſuffiſant pour la pratique ; mais il nous a été important de démêler plus ſcrupuleuſement l'effet de la pure contraction, & celui de la réſiſtance.

Les principales cauſes de la réſiſtance qu'éprouve la veine, ſont 1°. le frottement contre les bords de l'orifice, qui ſe communique à toute la maſſe. 2°. Peut-être la déviation même des particules qui ſe contractent. Ces deux cauſes doivent être plus ſenſibles pour de petits orifices que pour de grands. 3°. L'effort que l'air oppoſe à la colonne d'eau, qui doit être proportionnel au quarré des viteſſes, ou aux charges. Ces trois cauſes, & d'autres peut-être

Digitized by Google

peut-être encore, que nous ne prévoyons pas, doivent retarder une vitesse de 1,617 d'une quantité plus grande que 0,117, si la contraction ne diminue les dépenses que dans le rapport de 1,5 à 1. Quelque étonnant que soit cet effet, nous aurions craint de le révoquer en doute, si nous n'avions été éclairés par les expériences des jets verticaux : en les combinant avec celles-ci, nous nous sommes convaincus que, abstraction faite des résistances particulières aux jets verticaux, leur hauteur est sensiblement égale à celle qui est due à la vitesse moyenne de la veine contractée ; que cette vitesse est bien moins diminuée que nous ne l'avions conclu d'abord ; & que le diamètre de la veine contractée est plus petit qu'il ne paroît par une mesure immédiate. Il paroît que, pour des orifices horizontaux percés au fond d'un vase, la contraction est sensiblement la même à toute hauteur, pour de petits orifices, & qu'elle diminue le diamètre de la veine à-peu-près dans le rapport de 1,6086 à 1. Le rapport de la dépense naturelle à la dépense réelle est encore plus grand, & est variable, parce que la résistance retarde plus ou moins la vitesse, suivant la charge, la figure & la grandeur de l'orifice. En nommant H la hauteur de la charge, la vitesse naturelle est égale à $\sqrt{H}\sqrt{724}=\sqrt{2gH}$; & nous supposerons que la vitesse réelle moyenne au point de contraction, ou $V=\sqrt{H}\sqrt{2g-K}$, en nommant K une quantité

qui exprime l'effet de la résistance, & qu'il faut déterminer dans tous les cas. Pour abréger, nous n'entrerons pas dans le détail de toutes les recherches que nous avons faites à cet égard; il nous suffira de constater notre opinion par la comparaison de nos résultats à ceux de l'expérience, tant sur la dépense des orifices que sur le tems que les vases mettent à se vider, & sur l'élévation des jets.

240. Nous avons donc remarqué, 1°. que les vitesses & la contraction des orifices quarrés étoient, à même charge, constamment les mêmes que celles des orifices circulaires, dont les diamètres étoient égaux aux côtés des premiers. Comme ces figures ont des rayons moyens égaux, & que les dépenses diminuent avec les rayons moyens, nous avons conclu d'abord que les quantités K pouvoient être relatives à l'inverse des rayons moyens, ou à $\frac{1}{r}$. 2°. Il nous a paru qu'à même charge ces quantités diminuoient en moindre raison que l'inverse des rayons moyens, & qu'elles pouvoient être représentées par $m\left(\frac{1}{r}+n\right)$, en nommant m & n des quantités constantes pour une même charge. 3°. Les expériences nous ont encore induits à croire que les quantités m & n varioient suivant le rapport des vitesses, & que la valeur générale de K étoit $\frac{V}{223}\left(\frac{1}{r}+\frac{V}{79}\right)$, que nous exprimerons par $\frac{V}{m}\left(\frac{1}{r}+\frac{V}{n}\right)$. Il semble que les deux dernières lois sont relatives au choc de l'air, qui

Digitized by Google

peut croître en plus grande raison que le quarré des vitesses, du moins quand il résiste à une colonne fluide. Ainsi la valeur générale de la vitesse V est $V = \sqrt{H}\sqrt{2g - \frac{V}{m}\left(\frac{1}{r} + \frac{V}{n}\right)}$; d'où l'on tire $V = \frac{H}{2mr\left(1 + \frac{H}{mn}\right)} + \sqrt{\frac{2gH}{1 + \frac{H}{mn}} + \left(\frac{H}{2mr\left(1 + \frac{H}{mn}\right)}\right)^2}$.

Nous présenterons dans le tems les résultats de cette formule pour les jets-d'eau, pour ne nous occuper ici que des vitesses aux orifices. Dans les premières expériences de M. l'Abbé Bossut, les orifices sont percés horizontalement au fond d'un vase, sous une charge constante de 11 pi. 8 po. 10 li. ; en divisant leurs dépenses par seconde par la section de l'orifice, diminuée dans le rapport de 1,6086 à 1, nous en avons conclu les vitesses d'expérience. On peut les comparer, dans le tableau suivant, aux vitesses calculées d'après la formule, & à la vitesse naturelle due à 11 pi. 8 po. 10 li. de hauteur, qui est de 319,31.

Exp	Figure des orifices.	Dimensions		Rayons moyens	Vitesses d'expérience	Vitesses calculées.
e.		po.	li.	po.	po.	po.
1	circul.	0	6	0,125	315,5	315,5
2	id.	1	0	0,250	316,8	316,8
3	id.	2	0	0,500	317,4	317,4
4	rectang	1 sur 3		0,100	314,5	314,8
5	quar	1	0	0,250	316,8	316,8
6	quar	2	0	0,500	317,4	317,4

241. Une telle comparaison donne une idée bien avantageuse de la précision de M. l'Abbé

Digitized by Google

Boſſut, & peut donner quelque confiance à la formule que nous avons déduite, quant à la grandeur des orifices horizontaux. La loi relative aux hauteurs ſera prouvée par les jets-d'eau. Il réſulte de cette loi que, la réſiſtance de l'air augmentant en plus grande raiſon que les charges, doit limiter la viteſſe même pour des charges infinies. En effet, la formule $V = \sqrt{\frac{2gH}{1+\frac{H}{mu}} + \left(\frac{H}{2mr\left(1+\frac{H}{mn}\right)}\right)^2} - \frac{H}{2mr\left(1+\frac{H}{mn}\right)}$ montre que la viteſſe augmente de moins en moins, à meſure que la charge s'élève. En ſuppoſant cette charge infinie, on peut négliger l'unité dans les dénominateurs; alors les quantités H ſe détruiſent, & on a, pour la plus grande viteſſe poſſible, à un orifice d'un pouce de diamètre, $V = 3416$ pouces, qui répond à une chûte de 1343 pi. 2 po., limite des plus grands jets-d'eau d'un pouce de groſſeur. Nous verrons encore que pluſieurs cauſes, auxquelles on ne peut obvier, tendent à diminuer conſidérablement les grandes élévations des jets.

Nous ſommes néanmoins bien éloignés de vouloir conclure d'un auſſi petit nombre d'expériences les limites préciſes de la nature : notre but a ſeulement été de montrer que la viteſſe des orifices eſt bornée, comme le prouvent quantité d'expériences de M, Mariotte. Celles qui ont été faites ſur la réſiſtance que l'eau éprouve contre un corps

Digitized by Google

ſolide flottant à la ſurface, ſemblent prouver auſſi que ces réſiſtances augmentent en un rapport un peu plus grand que les quarrés des viteſſes. Il eſt vrai que cette différence peut être négligée dans les limites ordinaires de la viteſſe des eaux courantes, & de celle des corps qu'on fait mouvoir dans cet élément; mais il eſt à préſumer que les réſultats ſeroient bien différens pour de très grandes viteſſes. Au reſte il paroît que la réſiſtance de l'air ne commence à devenir ſenſible que pour des viteſſes dues à des chûtes de 3 à 4 pieds; auſſi l'avons-nous négligée dans nos expériences ſur le mouvement uniforme, où les viteſſes n'étoient dues qu'à des chûtes de 10 pouces au plus.

242. Les expériences ſur les orifices verticaux, que nous devons encore à M. l'Abbé Boſſut, préſentent des réſultats auſſi ſatisfaiſans, comme on en peut juger par le tableau ſuivant.

Exp.	Diamètres des orifices.		Charges.	Viteſſes d'expérience.	Viteſſes calculées.
e.	po.	li.	pi.	po.	po.
7	0	6	9	275,5	276,8
8	1	0	9	277,7	277,8
9	0	6	4	184,7	185,3
10	1	0	4	185,6	185,7

Dans les 10 expériences qui compoſent ces deux tableaux, la ſeptième & la neuvième ſont les ſeules qui, dans leur réſultat, preſentent une différence un peu ſenſible, ſoit que la contraction ſoit un peu plus forte pour la veine horizontale,

Digitized by Google

dans les petits orifices, ſoit qu'il y ait eu une légère erreur dans l'eſtimation du diamètre de 6 lignes. Il ſuffit en effet, pour rectifier les réſultats, de ſuppoſer ce diamètre plus petit de $\frac{1}{100}$ de ligne. Voyez la fin du chapitre ſixième.

243. pour confirmer encore la préciſion de la formule précédente, nous avons examiné comment elle s'accordoit avec quelques expériences de M. l'Abbé Boſſut ſur les réſervoirs qui ſe vident par des orifices minces. Nous ſuppoſerons qu'à chaque inſtant la viteſſe à l'orifice peut ſe déduire de la hauteur du réſervoir, comme ſi cette hauteur reſtoit conſtante; hypothèſe qui eſt plus que vraiſemblable, comme on peut le voir par le tableau ſuivant. Ainſi, en ſe ſervant des mêmes données, employées déja ci devant (234) pour les réſervoirs qui ſe vident par des tuyaux de conduite, on a, pour chaque inſtant, $V = \sqrt{2g - K}\sqrt{H - x}$; d'où il ſuit que $\sqrt{2g - K}$ eſt égal à ce que nous avons exprimé par $\sqrt{M}$ dans les tuyaux. Ainſi l'équation $t = \frac{2A(\sqrt{H} - \sqrt{H - h})}{a\sqrt{2g - K}}$ donne la relation entre le tems & la quantité h dont l'eau s'eſt abaiſſée dans le réſervoir : l'aire de la veine contractée, ou celle de l'orifice, diviſée par 1,6086, eſt ici repréſentée par a. Quant à la valeur de K, elle doit à la rigueur varier un peu à chaque inſtant; mais comme elle eſt bien moins relative aux hauteurs des charges qu'à la grandeur de l'orifice, qui ne

Digitized by Google

varie pas, on peut, ſans erreur ſenſible, employer la valeur qui convient à la viteſſe moyenne entre les deux viteſſes extrêmes. C'eſt ainſi qu'ont été calculées les expériences ſuivantes. La hauteur primitive du réſervoir ou H = 11 pi. 8 po. L'aire A du réſervoir eſt un quarré de 3 pieds de côté; les orifices ſont placés horizontalement au fond du réſervoir.

DIAMÈTRE des orifices.	VALEURS de *h*.	VALEURS moyennes de K.	TEMS SUIVANT la théorie	TEMS SUIVANT l'expérience.
po.	pi.	po.	′ ″	′ ″
1	4	9,77	7 25,09	7 25,5
2	4	7,24	1 51,07	1 52,0
1	9	7,25	20 24,53	20 24,5
2	9	5,21	5 [illegible],70	5 6,0

On peut obſerver que la ſeconde expérience eſt la ſeule qui préſente une différence d'une ſeconde; & cette erreur vient probablement du tems obſervé. En effet, ſans avoir égard à la différence des réſiſtances, ce tems devroit être le quart de celui de la première, ou 1′ 51″,375; mais à cauſe d'une réſiſtance plus foible, il doit être un peu moindre, comme le donne la formule. Si on n'avoit égard à aucune réſiſtance, & qu'on diminuât ſimplement les orifices dans le rapport de 8 à 5, pour l'effet de la contraction, les tems ſeroient tous un peu foibles, & on les trouveroit ſuivant le même ordre de 7′ 22″,36 : 1′ 50″,59 : 20′ 16″ : 5′ 4″.

L'exactitude de tous ces réſultats prouve qu'on

peut connoître le véritable diamètre de la veine contractée, la vitesse moyenne au point de la plus grande contraction, & par conséquent le déchet que la vitesse naturelle éprouve par la résistance, du moins pour des orifices percés dans de minces parois, & pour un réservoir très-étendu, en comparaison de leur ouverture : mais si le réservoir se rétrécit vers l'orifice, si des obstacles s'opposent de quelque côté à l'affluence uniforme des filets d'eau, la théorie précédente se trouve alors en défaut, & ne peut, tout au plus, que servir de guide, pour ne pas trop s'écarter de la vérité. (*)

244. Quand la veine s'est contractée après le passage de l'orifice, ses filets deviennent divergens, pour occuper une plus grande section; & s'ils rencontrent alors les parois d'un tuyau, la résistance qu'ils éprouvent par le choc & le frottement, occasionne un remou qui agit sur la veine contractée, plus sensiblement cependant sur ses bords que vers le centre, & tend à l'élargir. Ainsi, à même charge, des tuyaux additionnels de quelques pouces de

(*) Parmi les Mémoires de l'Académie pour 1766, on en trouve un de M. le Chevalier de Borda sur la théorie des fluides, qui contient des expériences semblables : leurs résultats s'accordent avec les précédens. C'est de-là que nous avons directement déduit la contraction qui a lieu quand un tuyau est enfoncé dans un réservoir, & que l'eau n'en suit pas les parois. Nous avons trouvé par induction celle qui convient au même tuyau coulant plein. (Voyez §. 9.)

Digitized by Google

longueur, donnent plus de dépense que des orifices minces de même diamètre. Malgré cette réaction, le filet de l'axe conserve toujours sensiblement la vitesse due à toute la hauteur de la charge; mais la vitesse des filets va en diminuant du centre à la circonférence. La longueur du tuyau additionnel semble devenir un élément de plus dans les expériences de M. l'Abbé Bossut: il pense avec raison qu'il faut une certaine longueur, pour que le gonflement de l'eau antérieure ait toute son intensité, & produise le plus grand élargissement de la veine contractée. Ayant adapté verticalement à un même réservoir des tuyaux d'un pouce de diamètre, & de 6 lignes, 24 lignes, & 48 lignes de longueur, les derniers ont dépensé plus que les premiers; mais ces dépenses sont exactement proportionnelles aux racines quarrées des charges, comptées jusqu'à l'orifice inférieur du tuyau. Les trois vitesses réelles sont aux trois vitesses naturelles correspondantes dans le rapport de 1 à 1,2433: mais on ne peut pas conclure si cet effet est dû à la longueur du tuyau, ou si, dans les tuyaux additionnels verticaux, il faut compter les charges jusqu'à l'orifice inférieur. Cette incertitude auroit été ôtée, en faisant quelques expériences sur les mêmes tuyaux, placés horizontalement.

245. Ce rapport de 1 à 1,2433 entre les vitesses réelles & les vitesses naturelles, revient à celui de 13 à 16,1629; de sorte que l'aire de la veine étant toujours égale à celle de l'orifice, la vitesse

Digitized by Google

moyenne eſt réellement diminuée dans le rapport de 16,1629 à 13. Les expériences ne ſont pas aſſez multipliées pour pouvoir en déduire la loi exacte de la réſiſtance à l'entrée du tuyau. Cette réſiſtance d'ailleurs eſt ſi peu conſidérable, comparée à celle d'un tuyau un peu long, qu'on peut en négliger les variétés, & s'en tenir au rapport ſimple de 16 à 13 pour la diminution de viteſſe, occaſionnée par la contraction à l'entrée de tous les tuyaux. Nous avons préféré ce rapport ſimple au premier, parce que les expériences d'après leſquelles on l'avoit déduit, ſont faites à une charge d'environ 12 pieds, & qu'à cette hauteur la réſiſtance de l'air devoit un peu augmenter le rapport. D'ailleurs il eſt moindre, en ne comprenant pas dans la charge la longueur du tuyau additionnel; auſſi avons-nous ſuivi ce dernier pour le calcul des viteſſes uniformes dans les tuyaux longs.

246. Quand on donne à un tuyau additionnel une longueur un peu peu plus grande qu'environ 3 à 4 fois ſon diamètre, il s'y forme un frottement qui commence à faire diminuer les dépenſes; mais le mouvement de l'eau n'y eſt pas encore réglé de la même manière qu'il le ſeroit à une plus grande longueur; la viteſſe de l'axe y eſt encore preſque égale à la viteſſe naturelle; celle à la paroi eſt trop petite; la réſiſtance du frottement trop foible, ainſi que nous l'avons remarqué dans un tuyau d'un pouce de diamètre, qui n'avoit que deux pieds de longueur (348). Il y a donc une longueur néceſſaire

Digitized by Google

à l'entier établiſſement du régime; à cette longueur la réſiſtance acquiert toute ſon énergie, le rapport convenable entre la viteſſe de l'axe & toutes les autres viteſſes des filets juſqu'à la paroi s'établit; le parallélifme du mouvement de toutes les molécules a lieu; la force accélératrice eſt conſtamment détruite par la réſiſtance; & la viteſſe moyenne uniforme eſt exactement repréſentée par notre formule générale (55). Mais la contraction à l'entrée du tuyau eſt toujours la même, c'eſt-à-dire que la partie de la charge employée à produire la viteſſe, eſt toujours égale au quarré de la viteſſe moyenne uniforme, diviſé par un nombre qui eſt à $2g$ comme le quarré de 13 eſt à celui de 16, c'eſt-à-dire à $\frac{v^2}{478}$.

247. Nous n'avons point encore de connoiſſance exacte ſur la longueur du tuyau qui eſt néceſſaire à l'établiſſement du régime : il paroît ſeulement, d'après nos experiences, qu'elle eſt beaucoup plus conſidérable pour les gros tuyaux que pour les petits. Dans le tuyau de 3 lignes le régime étoit établi à moins de 3 pieds de longueur; dans le tuyau d'un pouce il l'étoit à 10 pieds de longueur, mais non pas à deux pieds; dans le tuyau de deux pouces il l'étoit à 30 pieds de longueur, mais non pas à 20. Ainſi, en ſuppoſant que la longueur due au régime ſoit de 24 pieds pour le tuyau de deux pouces de diamètre, & qu'elle varie comme le quarré des diamètres, ou comme les aires de la

Digitized by Google

ſection, on trouvera que la longueur due au régime pour le tuyau d'un pouce eſt d'une toiſe, & qu'en général cette longueur peut être égale au quarré du diamètre exprimé en pouces, multiplié par le nombre abſtrait 72. Pour le déterminer exactement, ainſi que les viteſſes moyennes relatives à des longueurs moindres, il faudroit quantité d'expériences qui nous manquent, & qui d'ailleurs ne ſeroient pas très-utiles; car ſi l'on ne fait pas couler l'eau par des orifices ſimples, ou par des tuyaux additionnels, on la conduit à des diſtances plus grandes, par des tuyaux dans leſquels la réſiſtance acquiert toute ſon énergie.

CHAPITRE IV.

Du mouvement de l'eau qui paſſe par pluſieurs orifices conſécutifs.

248. SI on adapte à la face verticale d'un réſervoir entretenu conſtamment plein, un tuyau horizontal qui ſoit traverſé dans ſon intérieur par pluſieurs diaphragmes perpendiculaires à ſon axe, & percés chacun d'un orifice beaucoup plus petit que l'aire du tuyau; connoiſſant l'aire du tuyau & celles des orifices, on demande la relation qu'il y aura entre la charge entière & les viteſſes que l'eau prendra, tant dans le tuyau qu'à chaque orifice.

Pour trouver ce rapport, nous négligerons

Digitized by Google

d'abord la réſiſtance produite par le frottement contre les parois du tuyau, comme on ſeroit autoriſé à le faire, ſi le tuyau étoit fort court : ainſi nous n'examinerons que la charge capable d'imprimer les différentes viteſſes. Nous ſuppoſerons auſſi que le mouvement de l'eau à travers un orifice, pour ſe répandre dans un tuyau plein, eſt le même que ſi elle couloit en l'air, comme l'expérience l'a confirmé.

Soient H la hauteur de la charge, A l'aire du tuyau, M, N, Q, &c. les aires de pluſieurs orifices percés dans autant de diaphragmes, V la viteſſe dans le tuyau, p le rapport de la contraction 1,6086. Pour ſimplifier les réſultats, on transformera les aires M, N, Q, &c. en d'autres aires plus petites m, n, q, &c., qui donneroient la même dépenſe s'il n'y avoit ni contraction ni réſiſtance. Ainſi, par exemple, ayant d'abord diviſé M par p, l'aire $\frac{M}{p}$ ſeroit celle de la veine contractée, & la viteſſe par cette aire, pour faire même dépenſe que le tuyau, étant connue, on trouvera (240) la valeur de K & de $\sqrt{2g - K}$, qu'on fera égal à $\sqrt{2g'}$, & on fera $m = \frac{M\sqrt{2g'}}{p\sqrt{2g}}$, ſi l'orifice eſt mince, & $m = \frac{M\sqrt{2G}}{\sqrt{2g}}$, ſi c'eſt un tuyau additionnel. On trouvera de même les autres aires fictives n, q, &c.

D'après ces données, ſi le premier orifice eſt placé à l'entrée du tuyau, la viteſſe que l'eau y

Digitized by Google

prendra étant en raiſon inverſe des aires ſera exprimée par $\frac{AV}{m}$, & ſa hauteur due par $\frac{A^2V^2}{2gm^2}$, parce que l'eau étant cenſée ſtagnante dans le réſervoir, paſſe du repos à la viteſſe $\frac{AV}{m}$. Après ce paſſage la viteſſe ſe réduit dans le tuyau à V juſqu'au ſecond orifice, où elle doit devenir $\frac{AV}{n}$, ce qui exige encore une charge de $\frac{A^2V^2}{2gn^2}$: mais la viteſſe V conſervée produit ſur ce deuxième orifice l'effet d'une charge égale $\frac{V^2}{2g}$; ainſi il n'eſt plus beſoin, pour produire la nouvelle viteſſe, que d'une charge égale à $\frac{A^2V^2}{2gn^2} - \frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{n^2} - 1\right)$. On démontreroit de même que le troiſième orifice, & chacun des autres, occaſionne une augmentation ſemblable, & égale à $\frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{q^2} - 1\right)$. Ainſi, la charge totale pour trois orifices, ou $H = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2} + \frac{A^2}{n^2} + \frac{A^2}{q^2} - 2\right)$, formule générale, qui ſe prête à pluſieurs combinaiſons propres à répondre à toutes les queſtions qu'on peut ſe propoſer ſur les rétréciſſemens dans les tuyaux.

249. Au lieu de rapporter la charge à la viteſſe qui a lieu dans le tuyau, on peut ſoumettre la formule à toute autre viteſſe, comme, par exemple, à celle du dernier orifice, que nous déſignerons par v : dans ce cas, on a $V = \frac{qv}{A}$, & par

Digitized by Google

conséquent $H = \frac{q^2 v^2}{2gA^2}\left(\frac{A^2}{m^2} + \frac{A^2}{n^2} + \frac{A^2}{q^2} - 2\right)$; mais qv exprime la dépense de cet orifice, & conséquemment celle du tuyau, qu'on peut nommer D. On aura donc $H = \frac{D^2}{2gA^2}\left(\frac{A^2}{m^2} + \frac{A^2}{n^2} + \frac{A^2}{q^2} - 2\right) = \frac{D^2\,(A^2m^2n^2 + A^2m^2q^2 + A^2n^2q^2 - 2m^2n^2q^2)}{2gA^2m^2n^2q^2}$, valeur de la charge, quand la dépense est donnée. Si l'aire du tuyau étoit très grande en comparaison de celle des orifices, & qu'ainsi la vitesse y fût presque nulle, on pourroit négliger les dernières unités; & l'équation se réduiroit à $H = \frac{D^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{q^2}\right) = \frac{D^2\,(m^2n^2 + m^2q^2 + n^2q^2)}{2gm^2n^2q^2}$. Ce cas se rapporte à celui d'un vase un peu grand, traversé & séparé par plusieurs diaphragmes horizontaux ou verticaux, percés chacun d'une petite ouverture. La hauteur H exprime ici celle de la charge au dessus du centre de l'orifice inférieur.

Soit x la hauteur due à la vitesse, à un orifice quelconque; on voit aisément que $\frac{D^2}{2gq^2}$ exprime cette hauteur pour le troisième orifice. Ainsi l'équation générale se change en celle-ci : $H = \frac{x\,(A^2m^2n^2 + A^2m^2q^2 + A^2n^2q^2 - 2m^2n^2q^2)}{A^2m^2n^2}$, qui se réduit à $H = \frac{x\,(m^2n^2 + m^2q^2 + n^2q^2)}{m^2n^2}$, quand l'eau est censée stagnante dans le vase; & si les orifices sont égaux, on a $H = 3x$, c'est-à-dire que la charge due à la vitesse, à un orifice, est égale à la charge totale, divisée par le nombre des orifices.

Digitized by Google

250. On peut remarquer que la diſtance qui ſe trouve entre les orifices n'influe pas ſur les différentes valeurs que nous venons de trouver, pourvu cependant, ainſi que nous l'avons ſuppoſé, qu'ils ſoient aſſez diſtans pour que, dans l'intervalle, la viteſſe puiſſe diminuer en raiſon inverſe des ſections: car ſi on ne laiſſoit que de très-petits intervalles entre des orifices égaux, ſitués ſur un même axe, le mouvement y auroit lieu à-peu-près comme dans un tuyau de même diamètre que les orifices. Les équations précédentes ne ſeroient donc plus applicables à ce mouvement, à moins qu'on ne tînt compte du changement d'hypothèſe.

Il peut arriver néanmoins que la diſtance entre les orifices altère l'ordre du mouvement, ſans changer la dépenſe. Imaginons un vaſe vertical plein d'eau, & traverſé par différens diaphragmes horizontaux, percés de petits orifices égaux, & que la dépenſe ſe faſſe librement dans l'air par l'orifice inférieur; ſi la diſtance entre les deux diaphragmes inférieurs excède la hauteur due à la viteſſe au dernier orifice, comme il ne peut dépenſer que ce que les autres orifices lui fourniſſent, il s'établira à ce dernier un courant d'air contraire à celui de la veine d'eau, qui ira occuper la partie ſupérieure de l'intervalle qui ſe trouve entre les deux derniers diaphragmes; l'eau s'abaiſſera dans cet eſpace, juſqu'à ce qu'il ne reſte qu'une charge ſuffiſante à la dépenſe des orifices ſupérieurs. Le même effet peut avoir lieu dans les autres intervalles,

Digitized by Google

intervalles, si l'orifice supérieur tend à fournir la moindre dépense : alors la hauteur H n'est point égale à la hauteur entière du réservoir, mais plus généralement à la somme des hauteurs de l'eau dans chaque intervalle.

Cependant si l'eau passe avec beaucoup de vitesse à un orifice de quelques lignes seulement de diamètre, le courant d'air contraire ne peut pas s'établir ; l'eau reste continue dans le vase ; & le mouvement a lieu suivant le résultat de la formule précédente ; une partie de l'eau contenue dans l'intervalle inférieur est soutenue par la pression inférieure de l'air, ce qui augmente d'autant la pression supérieure ; & cet effort se distribue sur tous les orifices, proportionnellement à leurs aires, ou également, s'ils sont égaux. Dans ce cas, la vitesse par l'orifice inférieur n'est pas due à toute la hauteur de l'eau contenue dans le dernier intervalle. Nous aurons occasion de remarquer cet effet dans une expérience.

251. La formule $H = \frac{x(m^2n^2 + m^2q^2 + n^2q^2)}{m^2n^2}$, dans laquelle x exprime la hauteur due à la vitesse au dernier orifice, & qui est relative au vase dans lequel l'eau est stagnante, se rapporte encore à un tuyau dans lequel la vitesse est sensible par rapport à celle des orifices, lorsque chaque orifice est disposé parallèlement à la direction antérieure du courant, & que les filets ne peuvent s'y introduire sans se détourner en changeant de direction.

Digitized by Google

Imaginons, par exemple, plusieurs bouts de tuyau assemblés perpendiculairement l'un à l'autre, & que l'eau ne puisse passer de l'un dans l'autre que par un orifice parallèle à l'axe de celui qu'elle vient de parcourir; la vitesse des filets dans un des tuyaux étant parallèle à son axe, ne peut pas influer sur la vitesse à l'orifice suivant, qui est percé dans une direction perpendiculaire. Ainsi la charge entière doit être sensiblement composée de la somme des hauteurs dues aux vitesses de chaque orifice, comme si la vitesse dans le tuyau étoit nulle. Ce résultat est d'autant plus vrai, que l'orifice est plus petit, relativement à l'aire du tuyau; & quand nous n'aurons à examiner que des cas semblables, nous pouvons déja déduire cette conclusion, que la partie de la charge employée à imprimer la vitesse dans un tuyau, n'exerce son effort que parallèlement à l'axe, & n'agit point du tout perpendiculairement à la paroi, tant que la vitesse qu'elle imprime subsiste: mais si parmi plusieurs orifices, les uns étoient disposés parallèlement, & les autres perpendiculairement au courant, il faudroit combiner les deux formules, & tenir compte de la variété de ces divers mouvemens.

252. Pour résumer & simplifier les principes précédens, & les rendre applicables aux problêmes que nous avons en vue, nous supposerons que l'entrée du tuyau est entièrement ouverte, qu'il n'y a qu'un seul orifice, & que la vitesse dans le tuyau est sensible par rapport à celle de l'orifice.

Digitized by Google

D'après ces données on peut déterminer la valeur de x, ou de la hauteur due à la vitesse de l'orifice dans quatre cas différens. 1°. Quand l'orifice étant perpendiculaire à l'axe du tuyau, il est percé dans une mince paroi. 2°. Quand, étant placé de même, il est dans un tuyau additionnel. 3°. Quand l'orifice est parallèle à l'axe du tuyau, ou pratiqué dans sa paroi, supposée mince. 4°. Quand on adapte à cette paroi un tuyau additionnel. Dans ces deux derniers cas, on suppose que l'extrémité du tuyau est bouchée, & que toute la dépense se fait par l'orifice.

Pour les deux premiers cas reprenons la formule $H = \frac{x(A^2m^2n^2 + A^2m^2q^2 + A^2n^2q^2 - 2m^2n^2q^2)}{A^2m^2n^2}$, relative au dernier orifice perpendiculaire à l'axe. Puisqu'il n'y a plus qu'un seul orifice, il n'y a qu'a rendre le second égal à A. D'après ce que nous avons dit ci-devant (248), on a $n^2 = \frac{2g'A^2}{2gp^2}$: mais comme alors l'eau n'éprouve ni contraction ni frottement, pour passer à travers un orifice aussi large que le tuyau même, on a $p = 1$, $2g' = 2g$, & $n^2 = A^2$. Ainsi la formule se réduit à $H = \frac{x(A^2m^2 + A^2q^2 - m^2q^2)}{A^2m^2}$. D'un autre côté, l'entrée du tuyau étant ouverte, le premier orifice devient encore égal à A, & on a $m^2 = \frac{A^2 2G}{2g}$; ce qui réduit encore la formule à $H = \frac{x\left(\frac{2G}{2g}A^2 + q^2 - \frac{2G}{2g}q^2\right)}{\frac{2G}{2g}A^2}$, ou $x = \frac{\frac{2G}{2g}A^2H}{\frac{2G}{2g}A^2 + q^2 - \frac{2G}{2g}q^2}$. Soit

Digitized by Google

nommée a l'aire entière de l'orifice : si cet orifice est mince, on aura $q^2 = \frac{2g'}{2g}\frac{a^2}{p^2}$; & si c'est un tuyau additionnel, on aura $q^2 = \frac{2G}{2g}a^2$. Ainsi la formule (A), pour l'orifice mince perpendiculaire à l'axe, devient $x = \frac{A^2H}{A^2 + \left(\frac{2g'}{2G} - \frac{2g'}{2g}\right)\frac{a^2}{p^2}}$; & celle (B) pour le tuyau additionnel est $x = \frac{A^2H}{A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2}$.

Pour les deux autres cas, il faut faire les mêmes réductions à la formule précédente $H = \frac{x(m^2n^2 + m^2q^2 + n^2q^2)}{m^2n^2}$, qui est relative aux orifices parallèles à l'axe, ou percés dans la paroi du tuyau : on trouvera de même la formule (C) pour l'orifice mince, $x = \frac{A^2H}{A^2 + \frac{2g'}{2g}\frac{a^2}{p^2}}$, & la formule (D) pour le tuyau additionnel, $x = \frac{A^2H}{A^2 + a^2}$.

Quand l'aire a est très-petite, en comparaison de A, les quatre formules (A), (B), (C), (D) se réduisent à donner sensiblement $x = H$.

Si dans les deux premières formules (A) & (B) on suppose $a = A$, il faudra observer, comme nous l'avons fait ci-devant, qu'il n'y a alors ni contraction ni frottement au passage du tuyau à l'orifice ; & le rapport des vitesses à l'orifice & dans le tuyau, que nous avions exprimé par $\frac{A}{\sqrt{\frac{2g'}{2g}}\frac{a}{p}}$, pour l'orifice

Digitized by Google

mince (248), se réduit à $\frac{A}{a}$. Ainsi, pour remplir cette condition dans l'équation (A), il faut diviser a par la quantité $\sqrt{\frac{2g'}{2g}\frac{1}{p}}$, ou multiplier a^2 par $\frac{2g}{2g'}p^2$: faisant ensuite $A = a$, la formule donne $x = \frac{2G}{2g}H$.

Si dans la formule (B), relative au tuyau additionnel, on divise a^2 par $\frac{2G}{2g}$, & qu'on fasse $a = A$, elle se réduit de même à $x = \frac{2G}{2g}H$. Dans tous les cas, il faut bien remarquer que x exprime la hauteur de charge suffisante pour produire la même vitesse & la même dépense qui auroient lieu si l'orifice étoit isolé & adapté immédiatement à un réservoir, où il éprouveroit même contraction & même frottement qu'à l'endroit où il est placé. Nous allons examiner dans le chapitre suivant comment le frottement & la pression contre les parois du tuyau, que nous avons négligés ici, influent sur la vitesse de l'eau à l'orifice.

CHAPITRE V.

De la pression que l'eau exerce sur les parois des différens lits dans lesquels elle coule.

253. QUAND l'eau coule dans un tuyau uniformément incliné, avec une charge à la tête,

Digitized by Google

capable d'imprimer la vitesse moyenne qui convient à sa pente & à son diamètre, elle n'exerce aucune pression contre le point de la paroi situé au sommet de son diamètre vertical; & cette pression, pour les autres points de la paroi, n'est due qu'à la hauteur de la partie supérieure du diamètre. La raison en est que la force accélératrice & la résistance se détruisant mutuellement, le mouvement & la direction imprimés dès l'entrée du tuyau, ne peuvent tendre à changer. Cette vérité est d'ailleurs prouvée par l'expérience. Si on retranche de ce tuyau toute la partie sémi-cylindrique située au dessus de l'axe, en donnant à l'orifice de la prise d'eau la figure du demi-cercle inférieur, & la même charge sur le centre d'impulsion, il est évident que la dépense diminuera de moitié, par la diminution de la section; mais le rayon moyen, la pente, & la vitesse moyenne demeureront constantes; & le demi-cylindre d'eau aura le même mouvement qu'il avoit précédemment, lorsqu'il étoit chargé de son autre moitié, sans que sa section tende à s'élever. Il en est de même du mouvement dans les canaux & dans les rivières; la pression de chaque point est due à sa profondeur sous la superficie de l'eau; mais la hauteur due à la résistance du lit est relative à la pente & à la section transversale de la rivière.

De même, si l'eau pouvoit se mouvoir dans un tuyau horizontal, sans y éprouver de résistance, elle y prendroit une vitesse due à la charge entière,

Digitized by Google

ſans quil en réſultât de preſſion contre les parois, du moins dans la partie ſupérieure du tuyau; mais l'effet du frottement eſt exactement ſemblable à celui d'un rétréciſſement au bout du tuyau : l'un & l'autre ralentiſſent la viteſſe; & la partie de la charge qui n'eſt pas employée à l'imprimer, fait effort dans tous les ſens, & forme une preſſion contre les parois, qui devient d'autant plus conſidérable, que la viteſſe eſt plus ralentie par la réſiſtance; tellement que ſi la viteſſe devient comme nulle, la preſſion eſt due à toute la hauteur de la charge.

Il faut donc bien ſe garder de confondre la preſſion avec la réſiſtance du frottement : celui-ci eſt toujours proportionnel, ou du moins relatif à la viteſſe, & eſt exprimé, pour une ſurface déterminée S, par $\frac{Sr}{b}$, comme nous l'avons vu (74), tandis que la preſſion, du moins dans un tuyau horizontal, eſt égale au poids d'une colonne qui auroit pour hauteur celle du réſervoir, moins celle qui eſt due à la viteſſe. Ainſi, le frottement à un point quelconque de la paroi, diminue d'autant plus que la viteſſe devient moindre, & la preſſion contre ce même point augmente d'autant plus au contraire, que la viteſſe diminue.

En général, la hauteur due à la preſſion contre un point de la paroi eſt égale à la hauteur due à la viteſſe qui auroit lieu à l'origine du tuyau, s'il n'occaſionnoit aucune réſiſtance, moins la hauteur

Digitized by Google

due à la viteſſe réelle. Cette règle eſt générale, à quelques modifications près, relatives à la figure du tuyau.

Fig. 25. Dans le tuyau incliné BC, la preſſion contre un point S eſt repréſentée par la hauteur AB, moins la hauteur due à la viteſſe dans le tuyau, & ſi cette dernière hauteur eſt égale à la première, la preſſion en S eſt nulle.

Dans le tuyau HIKL, où le centre de la gueulebée eſt au deſſous de celui de la priſe d'eau, en tirant la droite HL, la preſſion au point I ſera égale à AH − IO, moins encore la hauteur due à la viteſſe; & celle au point K ſera égale à AH + PK, moins la hauteur due à la viteſſe. Dans le tuyau DEFG, où la gueulebée eſt plus élevée que la priſe d'eau, en tirant l'horizontale GR, la preſſion au point E eſt égale à AR − EM, moins encore la hauteur due à la viteſſe dans le tuyau; & celle au point F ſera égale à AR + FN, moins la hauteur due à la même viteſſe.

Quelque charge & quelque figure qu'on puiſſe donner à un tuyau, la preſſion qu'un point quelconque éprouve, rentre dans la règle générale. Cette connoiſſance eſt relative à deux objets importans: le premier eſt de déterminer la force qu'on doit donner à un tuyau, pour réſiſter à la preſſion qu'on veut lui faire éprouver; & dans cette vue on doit toujours ſuppoſer la viteſſe nulle. Pluſieurs Auteurs ont donné à ce ſujet tout ce que l'expérience peut indiquer, eu égard aux

Digitized by Google

différentes matières propres à faire des conduites. Le ſecond, dont nous traiterons en particulier, eſt de déterminer les écoulemens par des ouvertures latérales, dont la force motrice eſt la preſſion. Nous en déduirons naturellement la théorie des jets d'eau.

254. Pour juger de l'intenſité de la preſſion, il paroît qu'il n'eſt rien de plus ſimple que de meſurer l'écoulement par une ouverture faite à la paroi; auſſi M. l'Abbé Boſſut s'eſt-il ſervi de ce moyen. Un tuyau horizontal de 16 lignes de diamètre, qui avoit ſervi aux autres expériences, a été percé d'une petite ouverture latérale, dont on a meſuré la dépenſe, le bout du tuyau étant d'abord fermé, & enſuite ouvert, avec des charges & des longueurs différentes; le diamètre de l'orifice n'eſt pas parfaitement connu, quoiqu'il ſoit eſtimé d'environ 3 lignes $\frac{1}{4}$: mais on a vu par expérience que quand le tuyau étoit bouché, cet orifice, qui étoit placé ſenſiblement au niveau de l'axe du tuyau, donnoit 196 pouces cubes par minute, ſous la charge totale de 12 pouces, & 274 pouces ſous celle de 24 pouces. En déſignant toujours par x les hauteurs dues aux viteſſes à l'orifice dans chaque cas, les dépenſes ſont proportionnelles à $\sqrt{x}\sqrt{2g-K}$. Mais comme, ſous la même charge totale, les viteſſes varient très-peu, on peut conſidérer K comme conſtant, & les dépenſes comme proportionnelles à $\sqrt{x}$; les valeurs de x ſont, dans tous les cas, égales à la charge entière H, moins celle

qui imprime la vitesse dans le tuyau. Or, lorsque le tuyau est ouvert, cette différence n'est autre chose que la hauteur due à la résistance ou à la pression, qu'il est toujours facile de calculer, d'après la formule du mouvement uniforme. Quand, au contraire, ce tuyau est bouché, ce cas se rapporte exactement à celui de la formule (C), dans laquelle $x = \frac{A^2 H}{A^2 + \frac{2g'}{2G}\frac{a^2}{p^2}}$: mais dans cette expérience, la valeur de $\frac{2g'}{2G}\frac{a^2}{p^2}$ est si petite relativement à celle de A^2, qu'elle n'influe que de quelques dixièmes de pouces sur la valeur des dépenses; & comme M. l'Abbé Bossut a négligé les décimales, nous pouvons de même négliger cette petite quantité, & supposer $x = H$, quand le tuyau est bouché. Si, dans ce cas, nous représentons par D la dépense connue de l'orifice, & par d sa dépense, quand le tuyau est ouvert, on aura la proportion $\sqrt{H} : \sqrt{x} :: D : d = D\sqrt{\frac{x}{H}}$.

255. Pour connoître donc les dépenses que devoit faire, suivant la théorie, l'orifice percé dans la paroi du tuyau, lorsque son extrémité étoit ouverte, & les comparer avec celles de l'expérience, il faut d'abord calculer, comme nous l'avons fait, les vitesses des tuyaux ouverts, relativement à leur charge, à leur diamètre & à leur longueur; (ces vitesses sont rapportées dans le tableau comparatif (55), aux expériences marquées de numéros semblables à ceux de la deuxième colonne du tableau

Digitized by Google

ſuivant) retrancher enſuite la hauteur due à cette viteſſe avec contraction, de la hauteur entière de la charge H; le reſte, déſigné par x, ſera la charge relative à la dépenſe cherchée.

	NUMÉROS du tableau (55).	LONGUEUR des tuyaux, exprimée en pouces.	HAUTEURS dues aux viteſſes calculées.	VALEURS de x.	DÉPENSES de l'orifice latéral calculées.	DÉPENSES de l'orifice latéral, ſuiv. l'exp.
			Hauteur du réſervoir : 12 pouces.			
		po.	po.	po.	po. c.	po. c.
1	61	360	2,2920	9,7080	176,3	171
2	64	720	1,1406	10,8594	186,45	186
3	67	1080	0,7354	11,2646	189,9	190
4	68	1440	0,5351	11,4649	191,6	191
5	69	1800	0,4171	11,5829	192,6	193
6	70	2160	0,3400	11,6600	193,1	194
			Hauteur du réſervoir : 24 pouces.			
7	59	360	5,1302	18,8698	243,7	240
8	60	720	2,5820	21,4180	258,8	256
9	62	1080	1,6648	22,3352	264,3	261
10	63	1440	1,20[illegible]0	22,792	267,0	264
11	65	1800	0,9388	23,0612	2[illegible]8,6	265
12	66	2160	0,7632	23,2368	269,6	266

256. Nos dépenſes calculées ſont ſenſiblement égales à celles que M. l'Abbé Boſſut a calculées par une autre méthode : il n'y a de différence qu'en ce qu'il a déduit les viteſſes dans le tuyau, des dépenſes d'expérience, au lieu que nous les avons calculées immédiatement par la formule du mouvement uniforme.

La comparaiſon des deux dernières colonnes du tableau précédent préſente quelques irrégularités,

Digitized by Google

qui peuvent provenir des erreurs inévitables dans l'expérience, & de l'omiſſion des décimales. On voit, par exemple, qu'entre la troiſième & la quatrième dépenſe, il doit y avoir plus d'un pouce de différence, & qu'il ne peut y en avoir deux entre la quatrième & la cinquième : voilà des erreurs viſibles. Mais on ne peut attribuer à la même cauſe les différences qui ſe remarquent à la première, ſeptième, huitième, &c.

257. Le principe, déja établi, que l'ouverture éprouvoit une preſſion due à la charge x, égale à la différence entre la charge entière & celle qui étoit due à la viteſſe dans le tuyau, eſt évident; ce n'eſt que l'application qui eſt fauſſe. Si on avoit adapté à l'ouverture latérale un petit tuyau recourbé verticalement, l'eau y ſeroit montée, & s'y ſeroit ſoutenue à la hauteur de x, de ſorte que la différence entre la hauteur du réſervoir & celle de l'eau dans le petit tuyau, eût été égale à $H-x$, ou à la hauteur due à la viteſſe dans le gros tuyau; & le mouvement s'y ſeroit continué, comme s'il n'y eût point eu d'ouverture. Cet effet eſt indubitable; & il auroit également lieu, quelque fût le diamètre de l'ouverture, & en quelque lieu qu'elle fût placée : mais en ne faiſant au gros tuyau qu'une ſimple ouverture qui fourniſſe une dépenſe, le régime du mouvement eſt altéré, & le rapport entre les dépenſes D & d, dépend non ſeulement de la preſſion, mais encore de la grandeur de l'ouverture, & de la diſtance où elle eſt du réſervoir.

Digitized by Google

258. Il y a lieu de croire que l'ouverture avoit été faite près de l'origine du tuyau horizontal, quoique M. l'Abbé Boſſut ne le diſe pas expreſſément; & il s'agit d'examiner l'altération qu'elle devoit produire dans la viteſſe du tuyau. Si la dépenſe du réſervoir eût été la même, lorſque l'ouverture étoit ouverte, que quand elle etoit bouchée, la viteſſe du tuyau, en deſſous de l'ouverture, ſe trouvant diminuée par la dépenſe qu'elle faiſoit avec la charge x, le frottement l'auroit été auſſi ſur la longueur du tuyau : alors la différence entre x & la charge employée à vaincre le frottement, dans le ſecond cas, eût été une partie inutile de la charge entière, ce qui eſt impoſſible ; car toute force produit un effet apparent, ou eſt détruite par une réaction : l'effet de la charge eſt de produire la plus grande dépenſe, eu égard aux obſtacles; ainſi, la dépenſe du réſervoir étoit un peu augmentée par l'ouverture. Une plus grande partie de la charge étoit donc employée à produire une plus grande viteſſe à l'origine du tuyau ; & le reſte, moindre que x, produiſoit la preſſion contre la paroi : cette hauteur étoit égale à celle due au frottement réſultant de la viteſſe au delà de l'ouverture; & cette viteſſe, diminuée par la dépenſe déja faite, étoit moindre que celle de l'origine, & même que la viteſſe uniforme du tuyau ſans ouverture. Cette combinaiſon ſe développera mieux en l'exprimant par une équation.

259. En conſervant les mêmes dénominations

Digitized by Google

que ci-dessus, supposons que $H-x$ soit la hauteur due à la vitesse à l'origine du tuyau, dont l'effet n'a lieu qu'horizontalement; la charge x sera la seule qui agisse sur la paroi, & qui tende à imprimer la vitesse de l'ouverture, en même tems qu'elle doit vaincre la résistance qui résulte du frottement au delà de l'ouverture. Si l'ouverture n'existoit pas, & en représentant 478 par 2G, & la section du tuyau par A, la dépense à l'origine du tuyau seroit exprimée par $A\sqrt{2G}\sqrt{H-x}$; & si l'ouverture n'influoit pas sur la valeur de x, sa dépense (254) seroit égale à $D\sqrt{\frac{x}{H}}$: mais nous avons vu dans l'instant que x doit diminuer; & on sait que les résistances sont sensiblement comme les quarrés des vitesses, quand celles-ci ne diffèrent pas beaucoup entre elles. Ainsi, en nommant h la hauteur due à la résistance du tuyau sans ouverture, tandis que x représente celle du même tuyau avec l'ouverture, on pourra faire la proportion $h : H-h :: x : \frac{x(H-h)}{h}$; quatrième terme qui exprime la hauteur due à la vitesse sur la longueur du tuyau; $\sqrt{2G}\sqrt{\frac{x(H-h)}{h}}$ sera cette vitesse même; & $A\sqrt{2G}\sqrt{\frac{x(H-h)}{h}}$ sera la dépense au de-là de l'ouverture. Si à cette dépense on ajoute celle de l'ouverture, la somme doit être égale à celle du réservoir. Ainsi on a l'équation $A\sqrt{2G}\sqrt{H-x}=$

Digitized by Google

$D\sqrt{\frac{x}{H}} + A\sqrt{2G}\sqrt{\frac{x(H-h)}{h}}$; d'ou l'on tire $x = \frac{2GHA^2}{\left(A\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(H-h)}{h}} + \frac{D}{\sqrt{H}}\right)^2 + 2GA^2}$. Cette valeur de x, substituée dans l'équation $d = D\sqrt{\frac{x}{H}}$, donnera les dépenses cherchées, qui différeront d'autant plus des dépenses calculées dans le tableau précédent (255), que la vitesse dans le tuyau sera plus grande. Si on supposoit l'ouverture nulle, alors $D = 0$, & on auroit $x = h$; c'est-à-dire que, dans ce cas, la hauteur due à la pression seroit égale à h, ce qui est évident.

260. Nous avons calculé les dépenses de l'ouverture, d'après la théorie précédente, pour les trois premières expériences qui répondent à chaque charge, parce que l'effet de la rectification que nous venons d'indiquer y est le plus sensible. La première colonne du tableau suivant indique les vitesses sans ouverture au tuyau, calculées (55) par le moyen de la formule du mouvement uniforme; les deux suivantes sont les vitesses à l'entrée du tuyau, & au delà de l'ouverture; la quatrième les hauteurs dues à la pression, quand l'eau coule par l'ouverture; & les deux dernières servent à la comparaison entre les dépenses de l'ouverture, suivant cette théorie & suivant l'expérience.

Digitized by Google

	Vitesses sans ouverture.	Vitesses à l'origine du tuyau.	Vitesses au delà de l'ouverture.	Valeurs de x.	Dépenses de l'ouverture, selon la théorie.	Dépenses de l'ouverture, selon l'expérience.
Charges ou hauteurs du réservoir, 12 pouces.						
e.	po.	po.	po.	po.	po.	po.
1	33,106	34,67	32,68	9,4706	174,12	171
2	23,345	25,33	23,03	10,6576	184,72	186
3	18,794	20,85	18,60	11,0903	188,43	190
Charges ou hauteurs du réservoir, 24 pouces.						
7	49,518	51,74	48,89	18,3996	240,00	240
8	35,130	37,83	34,79	21,0068	256,34	256
9	28,211	31,08	27,98	21,9783	2[illegible]2,[illegible]0	261

261. Les différences qu'on remarque dans ces nouveaux résultats, tantôt en plus, tantôt en moins, peuvent bien provenir des défauts inévitables qui peuvent s'être glissés dans la mesure des dépenses, comme il est aisé de le reconnoître. En considérant la marche des dépenses de l'ouverture, on voit que les premiere & seconde doivent être sensiblement dans le même rapport que les septième & huitième; ou bienque la différence entre les deux premières, doit être à la différence entre les deux dernières, comme deux dépenses correspondantes. Or, les dépenses première & septième sont à-peu-près comme 5 est à 7. Ainsi, la différence entre les dépenses septième & huitième étant de 16 pouces cubes, celle entre les dépenses première & seconde devroit être moindre que 11 pouces, comme la théorie l'indique, tandis qu'on la trouvée de 15 pouces : d'où l'on peut conclure que la première est trop foible, & la seconde trop forte.

262.

Digitized by Google

262. Nous avons ſuppoſé que l'ouverture étoit aſſez près de la priſe d'eau, pour ne pas tenir compte de l'intervalle; mais ſi elle étoit placée au tiers, par exemple, de la longueur du tuyau, le problême deviendroit un peu plus compliqué; la charge x ſe diviſeroit en deux parties, dont l'une ſeroit employée à vaincre la réſiſtance ſur le premier tiers; & l'autre feroit équilibre à la réſiſtance des deux autres tiers, avec une viteſſe diminuée par la dépenſe de l'ouverture; la hauteur due à la preſſion ou à la viteſſe de l'ouverture ſeroit toujours repréſentée par la quantité totale x, qui ſeroit d'autant plus grande que l'ouverture ſeroit plus éloignée de la priſe d'eau.

En effet, ſi l'ouverture étoit placée à l'extrémité du tuyau, l'eau ne pourroit avoir ſur toute la longueur une plus grande viteſſe que celle qui convient au mouvement uniforme; car elle produiroit une réſiſtance que la charge ne ſeroit pas capable de vaincre. Ainſi, on auroit alors exactement $x = h$; & les dépenſes de l'ouverture ſeroient égales à celles que nous avons calculées dans le premier tableau (255).

Tout ce que nous venons de dire du tuyau horizontal n'a lieu que pour des ouvertures très-petites en comparaiſon de l'aire du tuyau; mais ſi une ouverture, percée au deſſus du tuyau, dépenſoit beaucoup, & que la viteſſe au-delà de l'ouverture fût trop petite, pour que le tuyau coulât plein, alors l'ouverture ne pourroit pas continuer

Digitized by Google

la même dépenſe, tandis que l'eau s'abaiſſeroit au-delà : il faudroit néceſſairement que la dépenſe de l'ouverture fût aſſez diminuée, pour que le tuyau continuât à couler plein, à moins que l'ouverture ne fût ſituée en deſſous. Ainſi, la viteſſe d'un long tuyau horizontal n'étant pas plus grande qu'il ne faut pour que l'eau occupe toute ſa capacité, ſi on y pratique une ouverture ſupérieure, elle ne donnera aucune dépenſe; ce qui n'empêcheroit pas que l'eau ne ſe ſoutînt dans un petit tuyau vertical adapté à cette ouverture, & rempli d'eau par le haut, juſqu'à la hauteur du réſervoir, moins celle qui ſeroit due à la viteſſe de l'eau dans le tuyau; parce que ce tuyau vertical ne feroit aucune dépenſe. Il eſt donc des cas où on ne peut pas juger de la preſſion d'un tuyau par la dépenſe que fait une puverture latérale. Ce moyen eſt donc imparfait & ſujet à des modifications, tandis que la preſſion contre un point quelconque, exprimée par la hauteur à laquelle l'eau peut ſe ſoutenir dans un tuyau vertical adapté à une ouverture, eſt toujours déterminée par la charge du tuyau & la viteſſe que l'eau y prend.

263. L'inexactitude de la méthode des dépenſes des ouvertures, pour juger de l'intenſité de la preſſion, devient beaucoup plus ſenſible en conſidérant ce qui arriveroit dans un tuyau incliné. Suppoſons qu'il eût à ſa tête une charge plus grande que celle qui eſt due à ſa viteſſe, & qu'on y fît une ouverture ſupérieure aſſez conſidérable

Digitized by Google

pour diminuer la dépenſe en deſſous de l'ouverture, & y rendre la viteſſe relative à la pente uniforme du tuyau, alors on auroit beau augmenter l'ouverture, elle ne donneroit pas une plus grande dépenſe; la viteſſe de l'eau qui en ſortiroit diminueroit à meſure qu'on augmenteroit l'aire de l'ouverture; & on verroit que cette aire a ſes limites, pour que la viteſſe de l'eau qui en ſort ſoit due à toute la hauteur de la preſſion, tellement qu'elle doit être d'autant plus petite que la pente du tuyau approche davantage de celle qui eſt relative à l'uniformité du mouvement.

On pourroit demander contre quoi s'exerce l'effort de la preſſion, lorſque l'ouverture donne une dépenſe nulle, ou moindre que celle qui eſt due à la hauteur de la preſſion. Pour s'en faire une idée, il faut remarquer que ſi l'eau ſortoit par une grande ouverture, avec toute la viteſſe due à la preſſion, il faudroit qu'il ſe fît un vide au deſſous de l'ouverture, & que le tuyau ne coulât pas plein, ou diminuât ſa viteſſe, ce qui ne peut arriver ſans que l'air ne tende à entrer par l'ouverture: or, cette tendance de l'air à s'introduire dans le tuyau produit une preſſion ſur l'ouverture, qui détruit en tout ou en partie la preſſion contraire du tuyau. Nous aurons occaſion de montrer que ce fait eſt vérifié par l'expérience.

264. Nous n'inſiſterons pas davantage ſur ces ſortes d'écoulemens, peu uſités dans la pratique. Il ſuffit d'avoir établi la règle générale, que la preſ-

Digitized by Google

ſion latérale qu'éprouvent les parois d'un tuyau horizontal eſt due à la charge entière, moins la hauteur due à la viteſſe qui a lieu à la priſe d'eau, ſoit que cette viteſſe continue uniformément juſqu'au bout du tuyau, ſoit qu'elle diminue dans la longueur par des écoulemens latéraux ; car, dans ce dernier cas, la preſſion n'eſt moindre que celle du premier, que parce que la viteſſe à l'origine du tuyau eſt plus grande. Nous allons plus particulièrement conſidérer les écoulemens latéraux & directs qui ſe font par un tuyau fermé, & qui ſervent à former les jets-d'eau.

CHAPITRE VI.

Des Jets-d'eau.

265. QUAND on adapte à un réſervoir conſtamment plein un tuyau de conduite, dont l'extrémité eſt fermée, ſi dans ſa paroi ſupérieure, qu'on ſuppoſe horizontale, on perce une petite ouverture, ou qu'on y applique un ajutage vertical, il s'y formera un jet vertical d'une certaine hauteur, dont la viteſſe au paſſage de l'orifice ſera due à une charge que nous déſignerons par x. Nous avons vu dans les chapitres précédens qu'indépendamment de la réſiſtance des parois du tuyau, la preſſion qui a lieu contre les parois eſt toujours égale à la charge entière, moins la partie employée à mprimer la viteſſe dans le tuyau : or, cette preſ-

Digitized by Google

ſion n'étant autre choſe que la force motrice du jet, on peut la conſidérer comme ſi le tuyau ne produiſoit aucun frottement, & d'après les mêmes données, ſe ſervir des formules (C) & (D) (252), qui donnent $x = \frac{A^2H}{A^2 + \frac{2g'}{2G}\frac{a^2}{p^2}}$, lorſque l'ajutage n'eſt qu'un orifice mince, ou $x = \frac{A^2H}{A^2 + a^2}$, ſi c'eſt un tuyau additionnel. Plus l'ajutage ſera éloigné du réſervoir, plus la partie de la charge employée à vaincre le frottement dans le tuyau ſera conſidérable; mais comme elle n'eſt jamais perdue pour le force du jet, on peut conclure qu'un tuyau de conduite fournira toujours le même jet, à quelque diſtance du réſervoir que l'ajutage ſoit placé, pourvu qu'il ſoit percé dans la paroi de la conduite.

266. Quand l'eau éprouve une réſiſtance conſidérable ſur la longueur du tuyau, le diamètre de l'orifice du jet a ſes limites, pour pouvoir donner la plus grande dépenſe. Suppoſons en effet qu'après avoir fermé l'orifice, on ouvre le bout du tuyau; ſi on cherche alors la dépenſe qui convient au tuyau, à cette longueur, ce ſera la plus grande qu'il puiſſe faire, relativement à ſa charge; & la dépenſe du jet ne peut, dans aucun cas, l'excéder. Ainſi, en ſuppoſant que le jet doive ſe faire par un tuyau additionnel, & que $H - h$ ſoit la hauteur due à la viteſſe dans le tuyau ouvert, on aura $A\sqrt{2G}\sqrt{H - h} = a\sqrt{2G}\sqrt{x} =$

$a\sqrt{2G}\sqrt{h}$; & $a = A\sqrt{\frac{H-h}{h}}$. Si l'aire a de l'orifice étoit plus grande, le tuyau ne pourroit pas fournir à sa dépense sous la hauteur h; & alors on auroit $a\sqrt{2G}\sqrt{x} = A\sqrt{2G}\sqrt{H-h}$; & $x = \frac{A^2}{a^2}(H-h)$. Ainsi, quand on aura $a > A\sqrt{\frac{H-h}{h}}$, le jet donnera toujours la même dépense $A\sqrt{2G}\sqrt{H-h}$, qui sera la plus grande possible; mais pour qu'elle soit due à la plus grande hauteur, & que le jet s'élève le plus qu'il est possible, relativement à cette dépense, il faut qu'on ait $a = A\sqrt{\frac{H-h}{h}}$. Depuis ce terme si a diminue, la dépense du jet sera moindre, mais sa vitesse sera due à une plus grande hauteur; de sorte que, pour un orifice extrêmement petit, la charge du jet seroit sensiblement égale à H.

267. Si l'ajutage n'étoit qu'un orifice mince, on voit de même qu'afin que le jet s'élève le plus qu'il est possible, relativement à sa plus grande dépense, il faut que l'on ait $a = pA\sqrt{\frac{2G}{2g'}}\sqrt{\frac{H-h}{h}}$.

On doit observer que si le tuyau étoit incliné, & qu'il eût à la tête une charge moindre que la hauteur due à la vitesse relative à sa pente, la hauteur due à la plus grande vitesse dans le tuyau ne seroit point $H-h$, mais seulement la charge à la tête, ce qui rendroit a plus petit. Cette remarque doit s'appliquer également au cas précédent, où

Digitized by Google

nous avons ſuppoſé qu'on ſe ſervoit d'un tuyau additionnel.

268. Imaginons à préſent que l'extrémité inférieure du tuyau de conduite ſoit courbée pour prendre la ſituation verticale, de manière que les filets d'eau ſoient devenus bien parallèles & verticaux, avant de paſſer par l'ajutage, que nous ſnpporerons percé dans la platine horizontale qui ferme la conduite, le jet qui y ſera produit ſera aſſujetti à d'autres lois que les précedentes. Si la paroi ne produiſoit aucune réſiſtance, les formules (A) & (B) donneroient les valeurs de la charge x, employée à produire le jet; mais la partie qui fait équilibre au frottement du tuyau, n'agiſſant que perpendiculairement à l'axe, elle ne fait aucun effort contre la veine qui forme le jet : en retranchant donc cette partie de la charge entière, le reſte pourra être conſidéré comme une charge relative à un tuyau ſans frottement, & conviendra alors aux formules (A) & (B).

Il eſt donc queſtion de déterminer l'effet du frottement dans le tuyau, ou la partie de la charge employée à le vaincre : or, on voit que quand l'ajutage eſt mince, $\sqrt{2g'x}$ exprime la viteſſe à l'orifice; $\frac{a\sqrt{2g'x}}{pA}$ la viteſſe dans le tuyau, & $\frac{2g'a^2x}{2Gp^2A^2}$ la hauteur due à cette dernière viteſſe. Ainſi, en eſtimant cette viteſſe à-peu-près, on calculera la charge H', qu'il faudroit à un tuyau de même

longueur & de même diamètre, ouvert par le bout, pour produire une vitesse presque égale, dont h' seroit la partie employée à vaincre la résistance des parois ; & à cause que les résistances sont sensiblement comme les quarrés des vitesses, quand celles-ci diffèrent peu, on fera la proportion suivante : $H'-h' : h' :: \frac{2g'}{2G}\frac{a^2x}{p^2A^2}$: un quatrième terme $\frac{2g'}{2G}\frac{a^2xh'}{p^2A^2(H'-h')}$, qui sera la hauteur due à la résistance : cette quantité étant retranchée de la charge entière H, le reste exprimera la charge relative à la formule (A), ou la quantité qui y est simplement représentée par H. Ainsi on peut former l'équation $x=\frac{A^2}{A^2+\left(\frac{2g'}{2G}-\frac{2g'}{2g}\right)\frac{a^2}{p^2}}\left(H-\frac{2g'a^2xh'}{2Gp^2A^2(H'-h')}\right)$, d'où l'on tire $x=\frac{A^2H}{A^2+\left(\frac{2g'}{2G}-\frac{2g'}{2g}\right)\frac{a^2}{p^2}+\frac{2g'}{2G}\frac{a^2h'}{p^2(H'-h')}}$, formule générale (E) pour ces sortes de jets, quand l'ajutage est mince.

Si l'ajutage est un tuyau additionnel, $\sqrt{2Gx}$ sera la vitesse à l'orifice ; $\frac{a\sqrt{2Gx}}{A}$ sera la vitesse dans le tuyau ; $\frac{a^2x}{A^2}$ est la hauteur due à cette vitesse, & $\frac{a^2xh'}{A^2(H'-h')}$ sera la charge employée à vaincre le frottement. Ainsi prenant $H-\frac{a^2xh'}{A^2(H'-h')}$ pour la quantité désignée simplement par H dans la formule (B), on aura $x=\frac{A^2}{A^2+\left(1-\frac{2G}{2g}\right)a^2}\left(H-\frac{a^2xh'}{A^2(H'-h')}\right)$,

& en réduisant, $x = \frac{A^2 H}{A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right) a^2 + \frac{a^2 h'}{(H' - h')}}$, formule (F).

269. Si, dans les deux derniers cas, on supposoit le tuyau débouché, ou que l'orifice devînt aussi large que l'aire même du tuyau, il n'y auroit plus alors aucune espèce de contraction ni de frottement au passage du tuyau à l'orifice. Ainsi il faudroit alors faire les mêmes suppositions qu'à la fin du chapitre quatrième; c'est-à-dire qu'il faudroit multiplier a^2 par $\frac{2gp^2}{2g'}$, quand l'ajutage est mince, ou le diviser par $\frac{2G}{2g}$, quand c'est un tuyau additionnel; & si l'on fait en même tems $a = A$, les deux formules se réduisent à $x = \frac{2G}{2g} H \frac{(H' - h')}{H'}$: mais en nommant h la véritable charge employée à vaincre la résistance le long du tuyau, on a $\frac{H' - h'}{H'} = \frac{H - h}{H}$. Ainsi $x = \frac{2G}{2g}(H - h)$, comme cela doit être. En effet, puisque x exprime toujours la charge capable d'imprimer la vitesse du jet, & de vaincre le frottement de l'orifice, qu'on suppose nul ici, il faut qu'on trouve pour x la hauteur naturelle due à la vitesse dans le tuyau de conduite.

270. Nous ne connoissons point d'expériences exactes sur les jets dont les conduites sont un peu longues; & nous ne pouvons comparer la théorie précédente à l'expérience que pour des conduites très-courtes, dans lesquelles l'effet du frottement

Digitized by Google

contre les parois peut être négligé. Les formules (C) & (D) rempliſſent cette condition. Quant à celles (E) & (F), ſi le frottement de la conduite eſt nul, on n'a qu'à ſuppoſer $h' = 0$; & elles ſe réduiront aux formules (A) & (B).

S'il ne s'agiſſoit que de connoître la dépenſe des jets, on regarderoit l'ajutage comme un orifice adapté immédiatement à un réſervoir ſous la charge x, éprouvant la même contraction & le même frottement d'orifice que quand il eſt placé au bout de la conduite. La dépenſe ſe détermineroit alors par la méthode du chapitre troiſième; mais en ne conſidérant que la hauteur à laquelle le jet doit s'élever par la charge x, on peut demander ſi les filets du milieu, qui ont une viteſſe ſenſiblement due à la hauteur x, s'élèveront à cette hauteur, ou bien ſi la viſcoſité de l'eau établiſſant une ſorte d'égalité entre les efforts des différens filets, le jet ne s'élèvera qu'à la hauteur due à la viteſſe moyenne. L'expérience ſeule peut éclaircir ce doute; & elle paroît affirmer la deuxième queſtion, comme nous l'avons déja dit. Ainſi la viteſſe moyenne d'un ajutage mince, ſous la hauteur x, étant égale à $\sqrt{2g^2x}$, ou $\sqrt{(2g-K)x}$, la chute naturelle qui lui répond, ou l'élévation du jet ſera repréſentée par $x\frac{(2g-K)}{2g}$, ſi l'ajutage eſt mince, & par $\frac{2G}{2g}x$, ſi c'eſt un tuyau additionnel.

Il faut remarquer que, dans les valeurs de x,

Digitized by Google

H exprime toujours la hauteur de la charge jusqu'à l'axe du tuyau au dessous de l'ajutage, & que c'est de cet axe qu'on doit compter les élévations du jet. Dans les expériences de M. l'Abbé Bossut, que nous allons rapporter, les charges & les hauteurs des jets ne sont comptées que jusqu'à la paroi supérieure du tuyau de conduite ; cependant comme ces hauteurs sont beaucoup plus considérables que les rayons des tuyaux, nous pouvons, sans erreur sensible, nous servir des mêmes données, comme si elles étoient prises jusqu'à l'axe du tuyau.

271. Un tuyau horizontal de 3 pouces 8 lignes de diamètre, dont on ne connoît pas exactement la longueur, quoiqu'il fût assez court, a été adapté a un réservoir, sous une charge de 11 pieds de hauteur. Vers son extrémité, & dans sa partie supérieure étoit un mince ajutage de 2 lignes de diamètre : en approchant du réservoir il y en avoit deux autres de 4 lignes & de 8 lignes de diamètre. Au delà étoient deux ajutages formés par des tuyaux additionnels de 5 pouces 10 lignes de hauteur, & de 4 lignes de diamètre par le haut : le premier s'évasoit par le bas; l'autre étoit cylindrique. A l'opposé du réservoir étoit un autre tuyau horizontal de 9 à 10 lignes de diamètre, que nous avons estimé de $0^{po.},8$, sous la même charge de 11 pieds ; trois ajutages, de même diamètre que les premiers, y furent placés dans le même ordre.

Le tableau suivant présente les résultats de l'ex-

Digitized by Google

périence comparés à ceux de la théorie, par le moyen des formules (C) & (D). Nous n'avons marqué pour le gros tuyau que les hauteurs du jet incliné, qui sont plus grandes que celles du jet vertical, où la gerbe est rabaissée par la chute de l'eau supérieure; dans le second tuyau on ne connoît que les hauteurs du jet vertical.

Numéros des expériences.	Diamètres des ajutages.	Valeurs de K.	Valeurs de x.	Hauteur des jets, suivant la théorie.	Hauteurs des jets, suivant l'expérience.
Tuyau de conduite de 3 po. 8 li. de diamètre.					
e.	li.	po.	po.	po.	po.
1	2	37,5	132,0	125,1	124,5
2	4	21,5	132,0	128,0	127,5
3	8	13,5	132,9	129,4	128,0
4	4	ajutage conique.			116,5
5	4	cylind.	132,0	87,1	87,5
Tuyau de conduite de 0po.,8 de diamètre.					
6	2	37,5	132,0	125,1	119,0
7	4	21,3	129,7	125,9	115,8
8	8	11,2	103,0	101,4	94,0

272. On voit, par la comparaison des deux résultats, qu'on peut, sans erreur sensible, prendre pour hauteur du jet celle qui est due à la vitesse moyenne à l'orifice, tant pour les ajutages minces que pour les tuyaux additionnels. Dans le premier tuyau la vitesse à la prise d'eau est presque nulle, en comparaison de celle des jets, dont les hauteurs ne sont diminuées que par le frottement

Digitized by Google

contre les bords de l'ajutage. La viteſſe dans le deuxième tuyau eſt conſidérable, ſur-tout à la huitième expérience; & ſi les hauteurs des jets ſont plus diminuées que la théorie ne ſemble l'indiquer, c'eſt par des cauſes trop compliquées, pour avoir pu en tenir compte dans l'équation; d'abord par la chute de l'eau ſupérieure, qui a lieu dans les tuyaux parfaitement verticaux, & qui n'eſt pas même parfaitement détruite par une foible inclinaiſon, & enſuite par l'irrégularité de la contraction: car ici la plus grande partie de l'eau afflue vers l'orifice des deux côtés oppoſés, & très-peu dans le ſens du jet; les filets latéraux ſe choquent en ſe croiſant; & delà il réſulte néceſſairement une perte de viteſſe, à moins que les ajutages ne ſoient très-petits en comparaiſon du tuyau. Dans la ſeptième expérience la gerbe étoit déja très-élargie, & dans la dernière il ſe formoit quantité de jets particuliers, qui s'éparpilloient avec des directions & des élévations différentes.

Malgré la perte de la viteſſe, cauſée par l'irrégularité de la contraction, les expériences du petit tuyau prouvent aſſez bien que la partie de la charge employée à imprimer la viteſſe dans le tuyau, n'influe pas ſur la viteſſe du jet. Pour prouver de même que les réſiſtances latérales du tuyau n'influent point ſur la viteſſe, dans le ſens de ſa longueur, nous examinerons les autres expériences de M. l'Abbé Boſſut ſur un tuyau recourbé verticalement, & dont les différens ajutages étoient

Digitized by Google

percés dans la platine mince & horizontale qui en bouchoit l'extrémité. Ce tuyau, d'un pouce de diamètre, avoit trois à quatre pieds ou même davantage de longueur, & étoit adapté au fond d'un grand entonnoir, sous une charge constante de 3 pieds 2 pouces 11 lignes, jusqu'à l'ajutage. On ne peut pas négliger dans ces expériences les résistances causées par le frottement sur la longueur du tuyau & le choc contre le coude, ni la perte de hauteur qu'éprouve tout jet vertical par la chute des parties supérieures; car il ne paroît pas qu'on eût incliné le jet, pour diminuer cette perte: mais comme nous ne connoissons ni la forme du coude, ni la longueur du tuyau, il nous est impossible de déterminer par la théorie quelle devoit être la véritable hauteur des jets. Cependant, pour ne pas négliger des expériences aussi exactes, nous les avons mises à profit d'une autre manière: la dernière donne environ 33 pouces de vitesse dans le tuyau, & la hauteur du jet y est de 3po.,4 plus petite que celle qui seroit calculée sans aucune résistance dans le tuyau. Nous avons donc pu, avec raison, attribuer cette différence aux diverses causes de résistances; & d'après cette base, nous avons déduit le déchet sur la hauteur du jet dans les autres expériences, en le faisant proportionnel au quarré des vitesses dans le tuyau. Ces vitesses sont, à très-peu-près, comme les aires des ajutages, & leurs quarrés comme les quatrièmes puissances des diamètres des ajutages. C'est ainsi que nous

Digitized by Google

avons formé le tableau ſuivant, dans lequel la troiſième colonne exprime les hauteurs dues à la viteſſe du jet, ſans réſiſtance dans le tuyau, d'après la formule (A); la quatrième exprime les élévations du jet relatives aux charges précédentes; la cinquième les hauteurs réelles du jet d'après l'expérience, & la ſixième ces mêmes hauteurs augmentées du déchet occaſionné par les réſiſtances. On remarquera que, comme le tuyau de conduite étoit adapté au fond d'un entonnoir, la contraction n'y étoit pas auſſi grande qu'à l'entrée ordinaire des tuyaux; & d'après quelques expériences de M. de Poleni ſur les tuyaux additionnels, nous avons conclu, pour ce cas, que la quantité 2G égaloit à-peu-près le nombre 520 pouces, au lieu de 478. C'eſt la valeur que nous lui avons donnée dans l'expreſſion de x.

DIAMÈTRE des ajutages.	VALEURS de K.	VALEURS de x, ſans réſiſtance.	HAUTEURS du jet, ſuivant la théorie.	HAUTEURS réelles du jet.	HAUTEURS réelles du jet, ſans réſiſtance.
	po.	po.	po.	po.	po.
1	36,7	38,9	37,1	37,5	37,5
2	19,1	38,9	37,8	37,7	37,7
3	13,3	38,9	38,2	38,0	38,1
4	10,4	38,8	38,3	37,6	37,9
5	8,7	38,7	38,3	37,4	38,3
6	7,5	38,5	38,2	36,3	38,2
7	6,6	38,2	37,9	34,5	37,9

Cette comparaiſon eſt aſſez ſatisfaiſante pour prouver que dans ce cas le jet n'eſt point diminué par la hauteur due à la viteſſe dans le tuyau,

Digitized by Google

mais par celle qui eſt employée à vaincre la réſiſtance, laquelle agiſſant horizontalement contre les parois au deſſus du jet, ne peut pas influer ſur ſa hauteur.

Traité du mouvement des Eaux. Part. 4. Diſc. 1.

273. M. Mariotte a fait ſur les jets-d'eau un aſſez grand nombre d'expériences; mais il a ſouvent omis de faire mention de pluſieurs données importantes, qu'il croyoit indifférentes, quoique ſans elles on ne puiſſe comparer exactement ſes réſultats avec ceux de la théorie : il a employé, par exemple, un tuyau vertical de 3 pouces de diamètre, recourbé par le bas, & garni d'une platine horizontale, dans laquelle étoient percés des orifices de différens diamètres. Au haut de ce tuyau s'adaptoit un tambour, qui ſervoit de réſervoir; & en alongeant le tuyau il pouvoit ſe procurer différentes charges, qu'il a augmentées juſqu'à 50 pieds de hauteur. C'eſt avec cet appareil qu'il a fait la plupart de ſes expériences, ſans faire connoître quel étoit le développement du tuyau, qui devoit néanmoins faire éprouver, dans pluſieurs cas, une réſiſtance conſidérable, ſur-tout avec un coude très-bruſque. En eſtimant ce développement de la manière la plus probable, nous avons trouvé que ſes expériences s'accordent aſſez bien avec la théorie.

274. Pour connoître la meilleure forme des ajutages, M. Mariotte s'eſt ſervi d'un autre tuyau vertical, d'un diamètre vraiſemblablement moindre, & recourbé horizontalement par le bas : ayant

Digitized by Google

ayant fait dans cette partie une ouverture de ſix lignes, le jet ne monta qu'à 12 pieds, quoique la charge fût de 27; ce qui prouve aſſez que le tuyau de conduite étant d'un petit diamètre, la viteſſe y étoit conſidérable, & que la hauteur du jet étoit encore diminuée par l'irrégularité de la contraction; car la gerbe s'écartoit beaucoup: il recourba enſuite ſon tuyau verticalement, & après avoir eſſayé pluſieurs formes d'ajutages, qui ne lui réuſſirent pas, il perça la platine horizontale d'un orifice de 6 lignes: alors le jet s'éleva à 32 pieds, avec une charge de 35 pieds 5 pouces; ce qui prouve, comme on le déduit de notre théorie, que quand le tuyau eſt aſſez court pour que la réſiſtance ne ſoit pas très-conſidérable, en comparaiſon de la charge entière, il faut percer les ajutages ſur la platine horizontale qui bouche l'extrémité du tuyau, ſur-tout ſi l'on veut que le jet ſoit un peu gros; mais qu'au contraire dans de longues conduites, où la viteſſe eſt foible, & le frottement conſidérable, il vaut mieux percer l'ajutage dans la paroi ſupérieure du tuyau horizontal, parce que tout l'effet du frottement ſert à l'élévation du jet.

275. M. Mariotte a remarqué dans ſes expériences un effet ſingulier, qui ſe peut rapporter à ce que nous avons dit ci-devant (263), & qui peut cauſer dans les grandes charges une diminution de hauteur. La hauteur du tambour de ſon appareil n'étoit pas conſidérable, en ſorte que quand l'ouverture & la charge de l'ajutage étoient

Digitized by Google

fort grandes, il ne pouvoit pas entrer dans le tuyau de trois pouces autant d'eau que l'ajutage en auroit dépensé avec la charge entière : la pression de l'air sur l'ajutage empêchoit qu'il ne se formât un vide dans le tuyau au dessous du tambour; & cet effet retardoit la vitesse à l'ajutage, qui ne dépensoit que ce que le tambour pouvoit fournir : aussi le jet s'élevoit-il fort peu, & diminuoit considérablement, à mesure qu'on laissoit vider le tambour; mais le niveau de l'eau étant parvenu au fond du tambour, ou à la partie supérieure du tuyau, le jet s'élevoit tout-à-coup un peu au dessous de ce niveau.

276. Il paroît aussi par ces expériences que notre formule ne diminue pas tout-à-fait assez l'élévation des jets à 50 pieds de charge & au-delà; cela peut venir de l'irrégularité de la contraction, dont nous n'avons pas pu tenir compte, & qui est d'autant plus sensible pour un même ajutage, que la charge est plus considérable. Mais indépendamment de cette cause, & même de la perte occasionnée par la chute des particules supérieures; quand le jet se forme avec une grande rapidité, le choc de l'air divise la colonne, le jet se réduit en quantité de filets & de gouttes d'eau séparées, & ne peut jaillir à toute la hauteur relative à la charge, sans néanmoins pour cela que la dépense soit différente de celle que donne la formule. Pour donner une idée de cet effet, M. Mariotte a essayé de donner à l'eau de très-grandes vitesses, au moyen d'une

Digitized by Google

arbalête & d'un piſtolet ; & il a trouvé que, quoique chaſſée avec une viteſſe conſidérable, elle n'a pas été à 8 pieds de diſtance.

277. On trouve encore dans le même Auteur une expérience qu'il fit à Chantilly ſur une conduite d'eau compoſée de tuyaux de bois, forés à 5 pouces de diamètre intérieur, & emboîtés l'un dans l'autre : une partie de cette conduite étoit en pente, avec une charge de 18 pieds ; le reſte étoit horizontal, & paſſoit à travers un étang, & le long d'un canal aſſez étendu. L'eau étant retenue par le bas, on perça dans la partie horizontale, & à 104 toiſes de l'origine, un orifice de 10 lignes, qui donna un jet de 15 pieds de hauteur. 80 toiſes plus loin un pareil orifice auroit dû donner le même jet, mais il ne fut que de 14 pieds. Cette experience ſeroit contraire à nos principes, ſi elle n'étoit prouvée être défectueuſe, par un fait dont M. Mariotte fait mention. Ayant fermé la priſe d'eau, le jet devoit ceſſer entièrement, ce qu'il ne fit pas, & au contraire il continua de s'élever à plus de deux pieds, ce qui fit connoître que les pièces dont la conduite étoit compoſée s'étoient déboîtées, & donnoient paſſage à l'eau de l'étang & du canal au fond deſquels elle paſſoit. Lors donc que le tuyau étoit chargé de 18 pieds d'eau, cette charge étant alors ſupérieure à la hauteur de l'eau de l'étang & du canal, l'eau devoit s'écouler du tuyau par cette filtration ; & au lieu d'avoir ſimplement un orifice de 10 lignes d'ou-

Ibid. Part. 5. Diſc. 1.

Digitized by Google

verture, toutes les ouvertures se réunissant ensemble, pouvoient faire l'équivalent d'une aire de plusieurs pouces. Mais dans une autre expérience on ajouta au tuyau vertical de 3 pouces de diamètre une conduite horizontale de 40 pieds de longueur; & les jets, par des ouvertures de six lignes, s'élevèrent à la même hauteur, soit qu'ils fussent formés au pied du tuyau vertical, ou à 40 pieds de distance.

En général, M. Mariotte conclut de toutes ses expériences que, vu l'énorme dépense que fournit une grande charge, on ne peut guère se procurer des jets de plus de 100 pieds de hauteur, & à cette limite notre formule paroît suffisante.

278. Il faut convenir que la matière de cette quatrième section exige de la part des lecteurs une attention soutenue & une application très-suivie. La nouveauté peut-être & la complication du sujet ne nous ont pas permis de mettre dans ce travail toute la clarté avec laquelle on expose des vérités éclaircies par un long usage, & développées déja par plusieurs auteurs. Pour en rendre l'exposition plus nette & l'application plus facile, nous nous proposons le problême qui suit.

PROBLÊME.

Connoissant la dépense d'un réservoir, sa distance horizontale & son élévation constante au dessus d'un bassin, où l'on veut former un jet-d'eau

Digitized by Google

vertical ; on demande de déterminer les diamètres du tuyau de conduite & de l'ajutage, ainsi que la hauteur du jet.

Supposons que la longueur de la conduite soit de 200 toises, la hauteur du réservoir de 36 pieds, & sa dépense d'un pied cube par seconde : la partie de la charge qui doit être employée à vaincre le frottement de l'eau sur 200 toises de longueur devant être considérable, il est important de ne pas la perdre pour la hauteur du jet ; ainsi on doit percer l'ajutage sur la paroi même du tuyau de conduite, & non dans la platine, qui fermeroit son extrémité recourbée ; & comme, dans ce cas, la hauteur due à la vitesse dans le tuyau est perdue pour le jet, il est avantageux de tenir son diamètre un peu grand, pour que la vitesse n'y soit pas très-considérable. On pourroit, dans cette vue, régler à 2 pieds la perte de hauteur employée à produire la vitesse, c'est à-dire que cette vitesse dans le tuyau seroit due à 2 pieds de chute avec contraction ; & d'après cette supposition, on détermineroit aisément le diamètre du tuyau. Mais avant de régler ainsi le diamètre, il faut s'assurer si le frottement produit par cette vitesse sur 200 toises de longueur, pourroit être vaincu par la charge restante de 34 pieds. Or, d'après la dépense donnée, le diamètre du tuyau seroit de 4^{po},65 ; la vitesse d'environ 102 pouces ; & pour se procurer cette vitesse, il faudroit une hauteur de réservoir d'environ 77 pieds, ou que le tuyau de conduite n'eût que 90 toises

de longueur. Il eſt donc néceſſaire de diminuer la viteſſe, en augmentant le diamètre du tuyau de conduite. Mais pour l'augmenter le moins poſſible, nous le fixerons de manière que la dépenſe d'un pied cube par ſeconde ſoit la plus grande qu'il puiſſe faire, eu égard à ſa charge & à ſa longueur. C'eſt le cas du problême (§. 230). En en faiſant ici l'application, on trouvera que le diamètre doit être de $5^{po.},3632$, ou 5 pouces 3 lignes $\frac{1}{3}$; l'eau y prendra une viteſſe de $76^{po.},5$, dont la hauteur due avec contraction eſt de $12^{po.},24$. Ainſi la partie de la charge employée à vaincre le frottement, eſt de $34^{pi.},98$, ou de $419^{po.},76$.

C'eſt cette partie de la charge qui eſt deſtinée à former le jet, & d'après laquelle on peut déterminer le diamètre de l'ajutage, ſuivant la hauteur à laquelle on veut que le jet s'élève. Quelque ſoit ce diamètre, la dépenſe ne pourra pas excéder celle que fournit la conduite, qui eſt la plus grande poſſible. Ainſi, comme nous l'avons déja dit, plus on augmentera le diamètre de l'ajutage, plus on diminuera la viteſſe, & conſéquemment la hauteur du jet. Suppoſons donc qu'en faiſant ce diamètre aſſez grand pour dépenſer un pied cube par ſeconde, on veuille en même tems perdre le moins poſſible ſur la hauteur du jet, il ſuffit de chercher le diamètre d'un orifice adapté immédiatement à un réſervoir, & capable de dépenſer un pied cube, ſous la charge de $419^{po.},76$. Parmi les formules précédentes (252), celle qui étoit déſignée par

Digitized by Google

(C) convient à ce cas, & donne $x = \frac{A^2H}{A^2 + \frac{2g'a^2}{2Gp^2}}$.

Mais le tuyau étant à sa plus grande dépense, & le jet à sa plus grande hauteur (267), on doit avoir $a = pA\sqrt{\frac{2G(H-h)}{2g'h}}$: substituant cette valeur dans celle de x, on a $x = h$; c'est-à-dire que la charge du jet est égale à la charge entière, moins celle qui est due à la vitesse dans le tuyau.

La charge du jet étant connue, le problême doit se résoudre par la formule des orifices simples (240), qui donne l'expression de la vitesse en valeurs du rayon moyen & de la charge. Cette même vitesse peut aussi s'exprimer en fonctions de la dépense & du rayon moyen, en sorte que la formule du paragraphe (240) peut donner la valeur du rayon moyen, & par conséquent du diamètre ; mais cela exige la résolution d'une équation assez compliquée du cinquième degré. Il est donc plus simple de considérer que la vitesse moyenne de la veine contractée à l'ajutage est représentée en général (239) par $\sqrt{H(724-K)}$, en faisant ici $H = 419,76$; & la seule difficulté consiste à trouver la valeur de K.

Nous avons vu (240) qu'en général on a $K = \frac{V}{223}\left(\frac{1}{r} + \frac{V}{79}\right)$: cette quantité, assez petite par elle-même, varie peu, soit qu'on prenne V pour la vitesse véritable, on pour celle qui auroit lieu s'il n'y avoit point de résistance ; & en faisant même

une ſemblable ſuppoſition pour le rayon moyen. Néanmoins pour diminuer encore l'erreur, nous ſuppoſerons d'abord que la véritable viteſſe eſt due à une hauteur moindre que $419^{po.},76$, telle, par exemple, que 410 pouces; alors on auroit $V = \sqrt{724 \times 410} = 545$ pouces; & la dépenſe, diviſée par cette quantité, donneroit $3^{po.},17$ pour l'aire de la veine contractée, & $5^{po.},099$ pour l'aire de l'orifice, ces deux aires étant dans le rapport de 1 à 1,6086. Ainſi le diamètre de l'orifice ſera $2^{po.},548$, & ſon rayon moyen ou $r = 0^{po.},637$. D'après ces premières données, on a $K = 20^{po.},7$: la viteſſe de la veine contractée à l'ajutage ſeroit donc égale à $\sqrt{H(724 - 20,7)}$; & ſa hauteur due, ou l'élévation du jet, à $\frac{H(724 - 20,7)}{724} = 407^{po.},76$, au lieu de 410 que nous avions ſuppoſé pour calculer la valeur de K.

279. Cette erreur influe ſi peu ſur la dernière quantité, qu'on peut regarder les calculs précédens comme aſſez exacts. Si on vouloit cependant pouſſer la préciſion plus loin, on obſerveroit qu'ici le rayon moyen influe peu ſur la valeur de K, & que cette valeur eſt ſenſiblement proportionnelle au quarré de la viteſſe, ou à la charge qui lui eſt due, de ſorte que la quantité 20,7, qui répond à la charge de 410 pouces, ne doit être que de 20,6 pour celle de 407,76. Alors on trouve plus exactement que la hauteur due à la viteſſe de la veine contractée, ou la hauteur du jet, eſt de $407^{po.},81$;

Digitized by Google

cette viteſſe de 543$^{po.}$,4 ; l'aire de la veine contractée 3$^{po.}$,17997 ; le diamètre de cette veine 2$^{po.}$,012 ; & celui de l'orifice 2$^{po.}$,5524.

Le jet ne s'élevant que de 407$^{po.}$,81, perdroit 11$^{po.}$,95 par le frottement des bords de l'orifice, & par la réſiſtance de l'air, leſquels, ajoutés à 12$^{po.}$,24, qu'il perd déja par la viteſſe de l'eau dans le tuyau, font une perte totale de 24$^{po.}$,19 ſur 432 pouces de charge, ou 36 pieds : les groſſeurs variables de la gerbe, ou ſes ſections étant, comme nous le verrons bientôt, en raiſon inverſe des viteſſes à chaque point, on trouveroit qu'à un pied du ſommet ſon diamètre ſeroit d'environ 4$^{po.}$,8.

Tous ces calculs pourront paroître fort longs ; mais on les ſimplifie beaucoup en négligeant une préciſion aſſez inutile dans la pratique ; cette préciſion eſt cependant aſſez néceſſaire pour le diamètre de l'ajutage, ſur-tout quand la dépenſe eſt déterminée, & que le tuyau de conduite ne peut pas fournir davantage. Dans notre exemple, l'augmentation de moins d'un quart de ligne dans le diamètre de l'ajutage, ſuffiroit pour produire encore un pied de perte ſur la hauteur du jet. Ainſi on ne pourroit pas augmenter ſenſiblement la groſſeur de la gerbe, ſans nuire à ſon élévation ; & pour peu au contraire qu'on la diminuât, elle ne fourniroit plus la même dépenſe, & ne s'élèveroit pas ſenſiblement plus haut.

280. Si on conſervoit au tuyau de conduite le même diamètre & la même longueur, qu'on

Digitized by Google

recourbât verticalement ſon extrémité inférieure, en bouchant auſſi le premier ajutage, il faudroit, pour fournir la même dépenſe, que le bout fût entièrement ouvert; & comme le jet s'élève toujours à la hauteur naturelle due à la viteſſe moyenne, il n'iroit qu'à environ 8 pouces. Pour peu qu'on rétrécît enſuite ſon ouverture, la dépenſe devroit diminuer, & la hauteur du jet augmenter. Ainſi on peut ſuppoſer que le bout étant fermé par une platine horizontale, on y perce un orifice égal à celui que nous venons de calculer, &, dans cette ſuppoſition, propoſer le problême ſuivant.

PROBLÊME.

La longueur de la conduite, la hauteur du réſervoir, le diamètre du tuyau & celui de l'ajutage étant les mêmes que dans le problême précédent, mais l'ajutage étant percé dans la platine horizontale qui ferme le bout du tuyau recourbé verticalement, déterminer la hauteur du jet & ſa dépenſe.

La ſolution de ce problême ſe tire de la formule (E) (268), qui donne la charge employée à produire le jet, ou $x = \frac{A^2 H}{A^2 + \left(\frac{2g'}{2G} - \frac{2g'}{2g}\right)\frac{a^2}{p^2} + \frac{2g' a^2 h'}{2Gp^2(H'-h')}}$; l'aire A a pour diamètre $5^{po.},3632$; celle a $2^{po.},5524$; ou plutôt le diamètre de l'aire $\frac{a}{p}$ de la veine contractée eſt égal à $2^{po.},012$; $H = 36$ pieds, ou 432 pouces. Quant aux valeurs de h' & de $H' - h'$, qui

représentent, l'une la hauteur due à la résistance sur la longueur du tuyau, & l'autre la hauteur due à la vitesse, un simple apperçu suffit pour montrer que la première doit être d'environ 18 pieds ou 216 pouces. Ainsi la pente fictive de la conduite seroit de $\frac{1}{66\frac{2}{3}}$; la vitesse relative dans le tuyau seroit de $51^{po.},62$; & la hauteur due à cette vitesse avec contraction seroit de $5^{po.},574$; & on auroit $h' = 216$ pouces; $H' - h' = 5^{po.},574$. Si de la charge entière 432 pouces on retranche celle due au frottement, ou h', il reste encore 216 pouces pour la charge du jet, qui excède un peu la hauteur due à la vitesse à l'ajutage. Supposons donc que celle-ci ne soit que de 210 pouces; en calculant K d'après cette valeur & le rayon moyen de l'orifice, on trouvera cette quantité égale à environ $10^{po.},77$; de sorte que $2g'$ ou $724 - K = 713^{po.},23$.

Toutes les données de la formule précédente étant ainsi déterminées avec une précision suffisante, on trouvera $x = 200^{po.},5$. Il est vrai que cette valeur est un peu trop grande, parce que K a été calculé d'après une vitesse un peu trop forte; mais cette erreur ne peut guère influer dans ce cas que de $\frac{1}{200}$ sur la valeur de x, de sorte qu'on peut faire $x = 199^{po.},5$, & $K = 10$ pouces; alors la vitesse à l'ajutage $\sqrt{x(724-K)}$ devient $377^{po.},4$; sa hauteur due, ou celle du jet $x\frac{(724-K)}{724}$ est $196^{po.},74 =$ 16 pieds 4 pouces 9 lignes; la hau-

Digitized by Google

teur due à la viteſſe dans le tuyau doit être à celle-ci en raiſon inverſe du quarré des aires, ou des quatrièmes puiſſances des diamètres, ce qui donne cette hauteur naturelle de $3^{po.},896$; & cette même hauteur, avec contraction à l'entrée du tuyau, ou $H' - h' = 5^{po.},901$. Enfin la viteſſe dans le tuyau de conduite eſt de $53^{po.},11$; & la dépenſe de 1200 pouces cubes par ſeconde.

Il eſt bon de remarquer 1°. que tous les termes de la formule étant multipliés par le quarré des aires, il eſt plus ſimple de ſe ſervir des quatrièmes puiſſances des diamètres ou des rayons; 2°. que, ſi nous avons eſtimé $H' - h' = 5^{po.},574$, tandis qu'il ſe trouve enſuite réellement égal à $5^{po.},901$, cela ne change rien aux réſultats, parce que h', qui lui ſert de numérateur, a été ſenſiblement diminué dans le même rapport.

281. En comparant la ſolution de ce problême avec celle du précédent, on voit que, toutes choſes y étant égales, excepté la poſition de l'orifice, le premier jet perd par la réſiſtance de l'air & du frottement des bords de l'ajutage $11^{po.},95$, tandis que le ſecond ne perd que $2^{po.},76$ par les mêmes cauſes; mais le premier ne perd, d'un autre côté, que $12^{po.},24$ par la viteſſe de l'eau dans la conduite, tandis que le ſecond perd $232^{po.},5$ par le frottement que l'eau y éprouve, & la contraction à ſon entrée, de ſorte que dans le cas de l'orifice percé dans la platine qui termine le bout du tuyau, le jet eſt réduit à moitié de la hauteur qu'il pourroit

Digitized by Google

avoir ; & la dépenſe diminue dans le rapport de 144 à 100. Les mêmes rapports auroient lieu, ſi on employoit des ajutages ordinaires dans les deux cas.

Quoique la dernière diſpoſition de l'ajutage ou de l'orifice ſoit déſavantageuſe dans cet exemple, on pourroit obtenir la même élévation de jet, en diminuant de beaucoup ſon diamètre, ce qui diminueroit encore la dépenſe, ou bien en augmentant le diamètre du tuyau de conduite, qui pourroit alors fournir à la même dépenſe que dans le premier cas : mais on ne pourroit éviter l'un de ces deux inconvéniens, ou de n'avoir qu'une gerbe très-rétrécie, ou de jeter dans la dépenſe d'un gros tuyau de conduite, en s'écartant de l'économie qu'on doit ſe propoſer dans les ouvrages d'agrément, encore plus que dans d'autres.

Il eſt cependant des cas où il ſeroit plus avantageux de recourber le bout inférieur de la conduite, comme on le fait ordinairement, & de percer l'ajutage ſur la platine horizontale qui le ferme : cela dépend de la longueur qu'on donne au tuyau depuis le réſervoir juſqu'au jet. Les circonſtances locales & le calcul des effets qui doivent réſulter d'une diſpoſition bien entendue, doivent ſervir de guide, au défaut de règle générale ; car il n'y en a point à cet égard.

282. On remarque aſſez généralement que quand on ouvre tout-à-coup le robinet qui doit donner paſſage à l'eau pour former un jet, ſi ce robinet

Digitized by Google

eſt près de l'ajutage, la gerbe s'élance d'abord fort haut, & diminue enſuite ſon élévation, pour ſe fixer à celle qui lui convient dans ſon état ordinaire. Cet effet marque aſſez communément que la longueur de la conduite fait perdre beaucoup de hauteur par le frottement dans le tuyau, & qu'il ſeroit plus avantageux de percer l'ajutage dans la paroi ſupérieure du tuyau qu'à ſon extrémité recourbée. On pourroit, dans ce cas, & dans tous ceux où il convient d'en uſer de même, faire former au tuyau un demi-cercle vertical dans le milieu du baſſin, en tournant ſa convexité vers le haut, & faiſant enſorte qu'elle s'élève exactement à la ſurface de l'eau du baſſin : au point où cette convexité ſeroit tangente à la ligne d'eau du baſſin, ſeroit percé l'orifice ou placé l'ajutage, qui d'ailleurs répondroit exactement au centre du baſſin.

283. M. Mariotte donne, pour calculer la perte de l'élévation des jets, une règle que la plupart des Hydrauliciens ont ſuivie depuis. Elle conſiſte à faire ce déchet proportionnel aux quatrièmes puiſſances des viteſſes, ou aux quarrés des charges, en prenant pour baſe qu'un jet de 5 pieds perd un pouce de hauteur. Ce principe ne peut être vrai, puiſqu'on n'a égard ni au frottement de l'eau dans le tuyau, ni au diamètre de l'ajutage, ni à la manière dont il eſt placé. L'expérience ſur laquelle eſt fondée cette règle n'eſt exacte que dans quelques combinaiſons des différens élémens négligés : on voit que, ſans changer le diamètre de la conduite,

Digitized by Google

il ſuffit de varier celui de l'ajutage, pour avoir plus ou moins d'un pouce de perte. Ainſi toutes les tables qu'on a dreſſées, d'après cette règle, ſur les pertes des jets, à différentes hauteurs des réſervoirs, ne ſont d'aucun uſage dans la pratique, puiſqu'en les adoptant, il faut ſuppoſer qu'on peut négliger le frottement de l'eau dans la conduite, ou la hauteur due à la viteſſe qu'elle y prend.

284. Dans les diverſes expériences qu'on a faites ſur les jets-d'eau, on ne s'eſt point occupé de leurs dépenſes, & on pourroit croire d'abord que la gerbe qui s'élève au deſſus de l'ajutage preſſe ſur l'orifice, & pourroit en diminuer la dépenſe; mais on doit remarquer que ſi cela étoit, l'eau ne pourroit pas s'élever à la hauteur qui eſt due à la viteſſe moyenne au paſſage de l'orifice. C'eſt pourtant ce qu'elle fait : ainſi il faut conclure que la dépenſe & la contraction doivent être les mêmes que ſi la gerbe, au lieu de s'élever, ſortoit horizontalement, ou s'abaiſſoit au deſſous du réſervoir, & chaque molécule qui ſort de l'ajutage eſt, à quelques reſtrictions près, dans le même cas que ſi elle étoit iſolée; c'eſt-à-dire qu'elle monte juſqu'à ce que la gravité lui ait fait perdre peu-à-peu ſa force aſcenſionnelle. Comment donc les molécules inférieures, qui ont plus de viteſſe que les ſupérieures, n'agiſſent-elles pas ſur celles-ci?

Perſonne n'a vu un jet-d'eau, ſans remarquer que la colonne diverge & s'élargit, à meſure qu'elle s'élève, comme la dénomination de gerbe

Digitized by Google

l'indique aſſez : or la loi de cette divergence eſt donnée par la condition qu'une tranche inférieure ne doit point agir ſur la ſupérieure ; il faut donc que la force aſcenſionnelle de chaque tranche infiniment mince, ou, ce qui revient au même, que ſa dépenſe ſoit une quantité conſtante, de ſorte que le produit de l'aire d'une tranche par ſa viteſſe, eſt le même à toute hauteur, & que l'étendue de la tranche eſt en raiſon inverſe de ſa viteſſe (1) : or les viteſſes diminuent en raiſon de la racine quarrée de la différence entre la charge totale & l'élévation de la tranche ; d'où l'on voit, comme l'expérience le prouve, que la divergence de la gerbe devient à proportion plus ſenſible, à meſure qu'elle s'éloigne de l'ajutage. La cauſe phyſique de cet effet eſt que, chaque tranche étant iſolée dans ſon pourtour, elle a une liberté parfaite, pour s'étendre en augmentant de diamètre, ce qu'elle ne pourroit pas faire, ſi elle étoit contenue dans un tuyau de groſſeur uniforme (2.)

(1) Soient H la hauteur due à la viteſſe à l'orifice, r le rayon de ſa ſection contractée, y le rayon d'une autre ſection quelconque, & x la diſtance de cette dernière ſection au ſommet de la hauteur H ; l'équation de la courbe génératrice de la gerbe ſera $xy^4 = Hr^4$, du moins ſur la majeure partie de la hauteur du jet.

(2) Delà ſuit l'explication d'un phénomène hydraulique aſſez ſingulier : un tuyau cylindrique, ouvert par en haut, étant en partie plongé verticalement dans l'eau, ſi on débouche tout-à-coup l'orifice inférieur, l'eau s'élève d'abord dans le tube au deſſus de ſon niveau, parce que les tranches n'ayant pas la liberté de s'étendre, agiſſent les unes ſur les autres ;

On

Digitized by Google

On pourroit objecter que, d'après cette loi, la tranche la plus élevée n'ayant plus de viteſſe, devroit avoir une aire infinie ; mais il faut remarquer qu'il y a une inégalité de viteſſes dans la même tranche, qui altère un peu la ſuite de la loi vers la partie ſupérieure ; car les filets du bord de la gerbe ayant moins de viteſſe que ceux du centre, la perdent plutôt que ceux-ci, & retombent avant d'avoir atteint le ſommet de la gerbe, qui ne ſe trouve qu'au point où les filets du centre ont entièrement perdu leur viteſſe, pour retomber à leur tour : ainſi la plus grande largeur de la gerbe eſt un peu au deſſous de ſon ſommet. Cette chûte des filets extérieurs altère un peu la hauteur des jets, quand ils ſont exactement verticaux ; mais il paroît que la gerbe n'eſt altérée que dans ſa partie ſupérieure.

285. Si on nomme V la viteſſe moyenne de la tranche qui ſort de l'ajutage, H la hauteur qui lui eſt due, & A l'aire de l'orifice fait en forme de tuyau additionnel, on voit que le tems t, néceſſaire à cette tranche pour parvenir au ſommet de la gerbe, eſt repréſenté par $\frac{2H}{V}$: or la dépenſe par ſeconde étant AV, la dépenſe pendant le tems t ſera $AVt = \frac{AV \times 2H}{V} = 2AH$; mais cette dépenſe n'eſt autre choſe que le volume de la gerbe, qui

mais après pluſieurs oſcillations, le mouvement ceſſe comme dans un ſyphon.

Digitized by Google

ſe renouvelle entièrement au bout de ce tems. Ainſi ce volume eſt un cònoïde tronqué, égal au double d'un cylindre, de même baſe & de même hauteur.

On peut remarquer que, toutes choſes égales d'ailleurs, la dépenſe d'un ajutage en forme de tuyau additionnel, eſt plus grande que celle d'un ajutage percé dans une plaque mince, quoique la gerbe qu'il produit s'élève moins haut. Ainſi le dernier mérite la préférence. Dans le premier, la gerbe a pour baſe l'orifice même; dans l'autre c'eſt ſeulement l'aire de la veine contractée : les dépenſes ſont donc à-peu-près : : 13 : 10 ; & le volume des gerbes : : 16×2 : 10×3, ou : : 16 : 15.

286. Quoi qu'il s'en faille de beaucoup que notre but ſoit de faire de ce chapitre un traité complet des jets, nous ne pouvons le terminer ſans parler des jets obliques. On ſait que tout corps, ſans en excepter les fluides, aſſujetti à la fois à l'action de la peſanteur & à celle d'une première impulſion horizontale ou oblique, décrit une parabole, du moins dans le vide. Si donc l'eau ſort d'un ajutage mince percé dans la paroi verticale d'un réſervoir, ſa première impulſion eſt horizontale, & le ſommet de la parabole qu'il doit décrire, ſe trouve placé à l'orifice même. C'eſt le cas de deux expériences faites par M. l'Abbé Boſſut. L'orifice circulaire avoit 6 lignes de diamètre ſous une première charge de 9 pieds, & une ſeconde de 4 pieds; le jet étoit reçu ſur un plan horizontal ſitué à 4 pi. 3 po. 7 li. au deſſous de l'orifice; & on a meſuré

Hydrodyn. tom. 2. pag. 120.

Digitized by Google

ſur ce plan l'amplitude du jet, ou l'ordonnée horizontale de la parabole : or, par la nature de cette courbe, ſon paramètre eſt égal au quadruple de la chûte due à la viteſſe primitive. Ainſi, en nommant H la charge entière juſqu'au centre de l'orifice, h la hauteur de l'abciſſe, & L la longueur de l'ordonnée, ou l'amplitude du jet, on aura $\frac{(2g-K)H}{2g}$ pour la hauteur due à la viteſſe primitive, & $L = 2\sqrt{\frac{(2g-K)Hh}{2g}}$: les valeurs de K ſont ici $14^{po.}, 3$, & $8^{po.}5$, &, d'après les autres données, les amplitudes doivent être de 12 pieds 3 pouces 10 lignes, & de 8 pieds 2 pouces 11 lignes. L'expérience les a données de (*) 12 pieds 3 pouces 3 lignes, & de 8 pieds 2 pouces 8 lignes.

Si on ne tenoit pas compte du frottement au bord de l'orifice, & qu'on prît 4H pour le paramètre, le calcul donneroit les amplitudes plus grandes, & égales à 12 pieds 5 pouces 4 lignes $\frac{1}{2}$, & 8 pieds 3 pouces 6 lignes : le léger excès des amplitudes que nous avons calculées, en tenant compte du frottement ſur les amplitudes réelles, peut venir de la foible réſiſtance que l'air oppoſe à la colonne fluide, dans l'eſpace qu'elle parcourt.

(*) On ne trouve à l'endroit cité de l'Hydrodynamique de M. l'Abbé Boſſut, que 11 pieds 3 pouces 3 lignes pour la première amplitude; mais c'eſt, ſans doute, une faute d'impreſſion, puiſque l'Auteur avoue que les amplitudes effectives ſont comme les racines des hauteurs des réſervoirs.

Digitized by Google

En effet, ces différences de 7 lignes & 3 lignes sont sensiblement comme les quarrés des vitesses. Ainsi, quoique la vitesse à l'orifice fût exactement égale à $\sqrt{(2g-K)H}$, les amplitudes ont pu être un peu diminuées par cette cause; ce qui confirme ce que nous avons dit des orifices verticaux (242).

CHAPITRE VII.

Du mouvement de l'eau dans les conduites composées de tuyaux de différens diamètres.

287. QUAND on veut mener l'eau d'un réservoir dans plusieurs quartiers, ou dans différentes maisons d'une grande ville, on se sert de gros tuyaux nourriciers, qui se partagent ensuite en plusieurs rameaux d'un diamètre moindre; & l'économie veut que les grosseurs des tuyaux soient proportionnées aux volumes d'eau qui doivent remplir les besoins de chaque particulier ou de chaque propriétaire.

Ces tuyaux, de diamètres différens, peuvent être assemblés bout à bout, ayant un axe commun, ou perpendiculairement les uns aux autres, ou enfin sous des angles quelconques. Pour déterminer la vitesse que l'eau prendra dans chacun, en usant des formules du chapitre quatrième, il ne s'agit que d'évaluer les parties de la charge employées à vaincre le frottement des parois; en retranchant

Digitized by Google

leur ſomme de la charge entière, le reſte peut être conſidéré comme une charge appliquée à un aſſemblage de tuyaux, qui n'offrent à l'eau aucune réſiſtance.

Pour développer cette application, nous ſuppoſerons d'abord un gros tuyau horizontal adapté à un réſervoir & fermé par l'autre bout, auquel on ajoute perpendiculairement un tuyau d'un moindre diamètre; nous déſignerons par x la hauteur due à la viteſſe dans le petit tuyau, telle qu'elle ſeroit pour un tuyau additionnel du même diamètre, adapté immédiatement à un réſervoir, & y éprouvant la même contraction que le petit tuyau éprouve à ſon origine; la hauteur entière H du réſervoir étant donnée, il ſera toujours facile d'exprimer vaguement quelle eſt la partie employée à vaincre la réſiſtance dans le petit tuyau. Ainſi, d'après ſa longueur & ſon diamètre, on eſtimera auſſi à-peu-près la viteſſe qui y aura lieu. Soient m la hauteur due à cette viteſſe, & n celle due à cette réſiſtance eſtimées, A l'aire du grand tuyau, & a celle du petit tuyau; on pourra faire la proportion, $m : n :: x : \frac{nx}{m}$, quatrième terme, qui exprime plus exactement la partie de la charge employée à vaincre la réſiſtance dans le petit tuyau: la hauteur due à la viteſſe dans le gros tuyau ſera exprimée par $\frac{a^2x}{A^2}$, parce que la dépenſe dans les deux tuyaux étant la même, les viteſſes ſont comme l'inverſe des aires; & par conſéquent les hauteurs dues à

ces viteſſes ſont comme l'inverſe des quarrés des mêmes aires. Or, cette hauteur, étant conſidérée comme charge, n'agit point ſur le mouvement dans le petit tuyau, qui a lieu dans une direction perpendiculaire : ainſi celle qui y pouſſe l'eau eſt ſenſiblement égale à $H - \frac{a^2 x}{A^2}$. D'un autre côté, cette force motrice eſt auſſi repréſentée par la ſomme des hauteurs dues à la viteſſe & à la réſiſtance que l'eau éprouve dans le petit tuyau, ou à $x + \frac{nx}{m}$. On a donc l'équation $H - \frac{a^2 x}{A^2} = x + \frac{nx}{m}$; d'où l'on déduit $x = \frac{A^2 H}{A^2 + a^2 + \frac{A^2 n}{m}}$.

288. En ſuppoſant que le petit tuyau devienne fort court, & ſe réduiſe à un ſimple tuyau additionnel, on a $n = 0$, & $x = \frac{A^2 H}{A^2 + a^2}$, comme dans la formule (D) des jets-d'eau (252). On peut appliquer ici la même obſervation, pour trouver la limite de la plus grande valeur de a, afin que la dépenſe du petit tuyau ſoit la plus grande poſſible, ce qui a lieu quand la dépenſe totale eſt égale à celle que donneroit le gros tuyau, s'il étoit ſeul, & ouvert à ſon extrémité. Ayant déterminé le diamètre du petit tuyau pour ce cas, il ſeroit inutile de l'augmenter, puiſque le gros tuyau ne lui permettroit pas de donner plus de dépenſe.

289. Si les deux tuyaux, au lieu d'être perpendiculaires l'un à l'autre, étoient prolongés ſur le même axe, il faudroit eſtimer de plus les hauteurs dues à la viteſſe & à la réſiſtance du gros tuyau.

Digitized by Google

Soient m' & n' ces hauteurs, puisque $\frac{a^2x}{A^2}$ exprime la hauteur due à la vitesse dans le gros tuyau; $\frac{n'a^2x}{m'A^2}$ sera la hauteur due à sa résistance. Si donc on retranche de la charge entière les hauteurs des résistances pour chaque tuyau, le reste $H - \frac{n'a^2x}{m'A^2} - \frac{nx}{m}$ sera considéré comme une charge appliquée à vaincre la contraction d'orifice de deux tuyaux additionnels consécutifs, dans lesquels la résistance est nulle; & il sera égal à ce que nous avons simplement désigné par H dans le chapitre IV (252), formule (B), dans laquelle $x = \frac{A^2H}{A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2}$; ainsi on aura ici $x = \frac{A^2\left(H - \frac{n'ax}{m'A^2} - \frac{nx}{m}\right)}{A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2}$, d'où l'on tire $x = \frac{m'nA^2H}{m'm\left(A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2\right) + mn'a^2 + m'nA^2}$.

290. En supposant le petit tuyau réduit à un simple tuyau additionnel, on auroit $n = 0$, & l'équation se réduit à $x = \frac{A^2H}{A^2 + \left(1 - \frac{2G}{2g}\right)a^2 + \frac{n'a^2}{m'}}$, comme dans la formule (F) (268) des jets-d'eau.

Si le diamètre du petit tuyau devenoit égal à celui du gros, on auroit $A = a$, & $m' = m$; mais il faut observer, comme nous l'avons fait ci-devant, que n'y ayant plus de contraction au passage

Digitized by Google

d'un tuyau à l'autre, a^2 doit être divisé par $\frac{2G}{2g}$, & au contraire la hauteur m, relative à l'entrée du petit tuyau, doit être diminuée, en la multipliant par le même rapport. D'après cela l'équation se réduit à $x = \frac{2G}{2g} \frac{m'H}{m'+n'+n}$; mais la somme des hauteurs dues à la vitesse à l'entrée du tuyau, & aux résistances sur les deux longueurs, est elle-même la hauteur entière du réservoir. On a donc $H = m' + n' + n$, & $x = \frac{2Gm'}{2g}$, expression de la hauteur naturelle due à la vitesse sans contraction.

291. Il arrive souvent que le petit tuyau est adapté au gros, suivant un certain angle d'inclinaison : alors une partie de la hauteur due à la vitesse du gros tuyau, & une autre de la hauteur due à sa résistance, doivent être comptées dans la charge entière du petit, la première en raison du cosinus, & l'autre en raison du sinus de l'angle; mais si cet angle, formé par les deux directions, étoit plus grand que 90 degrés, c'est-à-dire que le petit tuyau tendît à se rapprocher du réservoir, la première partie se devroit retrancher de la charge du petit tuyau, comme nous l'avons reconnu par l'expérience (§. 460), & ainsi que l'indique d'ailleurs le cosinus, qui devient négatif. Cette dernière disposition est certainement la moins avantageuse. Quant à celle d'un angle aigu, elle devient bonne ou mauvaise, selon la vitesse de l'eau dans le gros tuyau, & la résistance qu'elle y éprouve. Si,

Digitized by Google

comme il arrive le plus ſouvent, la hauteur due à la viteſſe y eſt moindre que celle qui eſt due à la réſiſtance, il eſt évident qu'il faut laiſſer agir la dernière charge le plus qu'il eſt poſſible ſur le petit tuyau, & l'adapter par conſéquent au premier ſuivant un angle droit.

292. En réfléchiſſant un peu ſur les principes que nous venons d'établir, on parviendra à combiner un aſſemblage de tuyaux de la manière la plus avantageuſe, & aux moindres frais poſſibles, pour remplir l'objet qu'on ſe propoſe.

Nous avons, à la vérité, laiſſé dans nos recherches une ſorte d'incertitude ſur l'eſpèce de la contraction qui a lieu au paſſage d'un tuyau à un autre; car nous avons toujours ſuppoſé qu'elle étoit la même que celle d'un tuyau additionnel adapté à un grand réſervoir, où la viteſſe diminue dans le rapport de $\sqrt{724}$ à $\sqrt{478}$. Cependant la contraction peut être moindre ou plus forte, ſuivant la diſpoſition & le diamètre des tuyaux; car il n'y a point de formule générale qui puiſſe exprimer cette perte de mouvement dans tous les cas. Heureuſement cet élément n'influe que ſur la hauteur due à la viteſſe dans le tuyau, hauteur bien au deſſous de celles qui ſont dues à la réſiſtance, quand les tuyaux ſont longs, comme on les emploie dans la pratique.

Voici un exemple qui réunit pluſieurs applications des principes qu'on vient de voir, renfermées

Digitized by Google

dans un problême, dont nous nous contenterons d'indiquer la ſolution.

PROBLÊME.

293. La quantité d'eau que peut fournir conſtamment un réſervoir étant donnée, on veut la diviſer & la diſtribuer en pluſieurs points, ſuivant un certain rapport déterminé, par le moyen d'un tuyau nourricier, & de pluſieurs autres tuyaux d'un moindre diamètre, adaptés perpendiculairement au premier. On connoît la poſition & la différence de niveau des différens points entre eux & avec le réſervoir; & on demande de fixer les diamètres de tous ces tuyaux, dans la vue de remplir l'objet avec le plus d'économie.

Ce problême, pris dans ſa généralité, n'eſt pas ſuſceptible d'une ſolution exacte & rigoureuſe; mais l'établiſſement d'un pareil ouvrage eſt d'aſſez de conſéquence pour qu'on ne néglige pas d'eſſayer par le calcul pluſieurs combinaiſons, parmi leſquelles on choiſira aiſément la plus avantageuſe. La première difficulté eſt la direction rectiligne ou ſinueuſe du tuyau nourricier : les circonſtances locales peuvent ſeules décider à cet égard, en rendant les plus gros tuyaux de partage les plus courts poſſibles. Cette direction étant déterminée, ſi le tuyau nourricier eſt long, & que la hauteur due à la viteſſe que l'eau y prendra ſoit moindre que celle qui eſt due à la réſiſtance, il faudra fixer ſon

Digitized by Google

diamètre, d'aprés la dépenſe totale, comme s'il étoit iſolé, & ouvert à ſon extrémité. La viteſſe étant connue dans l'intervalle entre le réſervoir & le premier tuyau de partage, la différence entre la hauteur de réſervoir de celui-ci & la hauteur due à la viteſſe dans le tuyau nourricier, ſera la charge du premier tuyau de partage. Après cette diviſion, la dépenſe & la viteſſe dans la partie ſuivante du tuyau nourricier diminuent d'une quantité connue, & par conſéquent auſſi la hauteur due à la réſiſtance ſur la longueur du ſecond intervalle. D'après cette diſpoſition, la ſuperficie du réſervoir s'abaiſſeroit, ſi on ne diminuoit pas le diamètre du tuyau nourricier dans cette partie, enſorte qu'avec la dépenſe qu'il doit faire, la viteſſe y ſoit encore moindre que dans la partie précédente, à cauſe du ſurcroît de réſiſtance cauſée par la diminution du diamètre; la hauteur du réſervoir pour le ſecond tuyau de partage, moins la hauteur due à cette dernière viteſſe, donnera la charge pour ce tuyau. On diminuera de même le diamètre du tuyau nourricier ſur le troiſième intervalle, & tous les autres juſqu'au dernier, où il ſeroit bouché. On connoîtra ainſi les charges particulières pour chacun des tuyaux de partage; & comme on ſuppoſe la longueur & la dépenſe de chacun fixées, il ſera aiſé de fixer leurs diamètres.

Digitized by Google

CHAPITRE VIII.

Du mouvement de l'eau dans les Pompes.

294. LES pompes ſont des machines trop connues pour en donner ici une deſcription détaillée. On peut d'ailleurs conſulter à cet égard l'architecture hydraulique de M Belidor, du moins quant à la partie pratique. La théorie des pompes dans l'état d'équilibre eſt très-ſimple ; mais ſi on les conſidère en mouvement, elles préſentent les recherches les plus épineuſes, quand on ne veut pas s'écarter de la préciſion géométrique. Pour ſuivre une marche plus à portée des artiſtes, nous donnerons une idée ſuffiſamment exacte des principales réſiſtances qu'il faut vaincre dans le jeu des pompes, en continuant d'appliquer ici les principes ci-devant établis ; & nous indiquerons en même tems le travail qui reſte à faire, pour en perfectionner les parties, & en étendre la théorie.

295. Pour commencer par la pompe aſpirante la plus ſimple, nous ſuppoſerons un ſeul tuyau vertical ABMN, plongé par le bas dans un réſervoir rempli d'eau juſqu'à la ligne CBD; le piſton H eſt garni d'une ſoupape qui s'ouvre de bas en haut ; au deſſous eſt une autre ſoupape E, fixée au corps de pompe, & qui s'ouvre dans le même ſens : après pluſieurs coups de piſton, l'air contenu dans le corps de pompe eſt chaſſé & remplacé par l'eau qui s'élève

Fig. 26.

Digitized by Google

du réſervoir, en paſſant par la ſoupape E; & cette eau, refoulée par la deſcente du piſton, & obligée de traverſer ſa ſoupape H, eſt élevée enſuite par l'aſcenſion du piſton, & obligée de ſe dégorger à la partie ſupérieure A du corps de pompe.

La pompe étant ainſi en jeu, nous pouvons conſidérer le piſton ſans peſanteur dans l'eau, ſa maſſe & le diamètre de ſa tige extrêmement petits; & chercher quelle eſt la force néceſſaire pour le faire monter avec une viteſſe donnée.

296. Quand l'eau n'eſt encore élevée que juſqu'en H au deſſous du piſton, on ſent que pour ſoutenir la colonne d'eau HB, il faut diminuer la preſſion de l'atmoſphère ſur le piſton, de la même quantité dont elle eſt diminuée dans ſa face inférieure par le poids de la colonne d'eau élevée, ce qui exige une force qui tire le piſton du bas en haut, avec un effort égal au poids de cette colonne; mais quand l'eau eſt parvenue au ſommet A du corps de pompe, il faut de plus ſoutenir la colonne AH. Ainſi la force néceſſaire pour maintenir le piſton en équilibre, quand la ſoupape H eſt fermée & l'autre ouverte, eſt égal en général au poids d'une colonne d'eau qui auroit pour baſe l'aire du piſton ou du corps de pompe, & pour hauteur celle à laquelle l'eau eſt élevée au deſſus de la ſuperficie CD du réſervoir.

Telle eſt la théorie ordinaire des pompes pour l'état d'équilibre : mais ſi on veut mettre l'eau en mouvement, en élevant le piſton avec une vi-

Digitized by Google

teſſe donnée, il eſt évident qu'il faut ajouter, au premier effort, une force égale à une charge d'eau capable d'imprimer cette viteſſe, en ſurmontant les obſtacles que préſente l'entrée du corps de pompe & la ſoupape fixe E. Cette charge ou augmentation de force eſt exactement égale à celle qui ſeroit néceſſaire pour mouvoir l'eau avec la même viteſſe dans le corps de pompe, s'il étoit ſitué horizontalement, & adapté à un réſervoir, dont la plus grande hauteur ne pourroit jamais excéder 32 pieds, qui équivalent au poids de l'atmoſphère. Sous ce point de vue il eſt facile de déterminer la force qui fait agir le piſton, d'après les formules du chapitre 4.

297. Soient V la viteſſe du piſton, A l'aire du corps de pompe, m & n les aires de l'entrée du corps de pompe & de l'orifice de la ſoupape fixe, diminuées l'une & l'autre par la contraction; ſi cet effet étoit nul, & qu'on ſupprimât la ſoupape, $\frac{V^2}{2g}$ exprimeroit la hauteur de la charge néceſſaire pour imprimer la viteſſe V; mais à cauſe de la contraction & de l'étranglement cauſé par la ſoupape, cette hauteur devient égale (248) à $\frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2}+\frac{A^2}{n^2}-1\right)$. Ainſi nommant D la denſité de l'eau, & p le poids qui repréſente la force à ajouter à celle qui fait équilibre à la colonne d'eau élevée, on aura $p = \frac{ADV^2}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2}+\frac{A^2}{n^2}-1\right)$; d'où il réſulte que l'effort pour rompre l'équilibre, & vaincre l'effet des étrangle-

Digitized by Google

mens dans les pompes, eſt proportionnel au quarré de la viteſſe du piſton, & indépendant de la hauteur à laquelle l'eau eſt élevée; de ſorte que, pour une petite hauteur, il peut devenir une partie conſidérable de la force totale.

298. Il faut cependant remarquer que ſi la viteſſe du piſton devenoit plus grande que celle que le poids total de l'atmoſphère, ou 32 pieds de hauteur de charge, peuvent imprimer dans le corps de pompe, après avoir vaincu les réſiſtances, l'eau ne ſuivroit plus le piſton, & les réſiſtances reſteroient proportionnelles au quarré de la viteſſe de l'eau, & non au quarré de la viteſſe du piſton; mais ce cas n'arrive pas dans la pratique.

Il auroit lieu cependant, ſi le bas du corps de pompe étoit fermé par une platine, au milieu de laquelle fût percé un orifice ſimple, dont l'aire fût par exemple 14 fois plus petite que celle du corps de pompe, & qu'on fit mouvoir le piſton avec une viteſſe de deux pieds par ſeconde; car pour que l'eau pût ſuivre le piſton, il faudroit qu'elle eût au paſſage de l'orifice une viteſſe de 28 pieds; ce qui eſt impoſſible, parce que le poids de l'armoſphère ne peut en imprimer une que de 27 pieds environ par un orifice ſemblable.

299. Les rapports $\frac{A}{m}$ & $\frac{A}{n}$ varient dans toutes les pompes, ſuivant la forme des ſoupapes, & de l'entrée de ces pompes: il eſt vrai qu'on a ſoin d'évaſer cette entrée autant qu'il eſt poſſible, pour

Digitized by Google

faciliter l'introduction de l'eau; mais on eſt obligé de la garnir d'un crible ou panier d'oſier, pour arrêter les corps étrangers, ce qui fait éprouver à l'eau une contraction conſidérable : la ſoupape ſe ferme par un clapet à charnière, ou par une eſpèce de coquille *fig.* 27, qui a un mouvement vertical : cette dernière ſe préſentant directement au deſſous de l'ouverture par où paſſe l'eau, lui fait perdre ſon mouvement vertical, & l'oblige de s'écarter latéralement, en ſe réfléchiſſant de tous côtés ſur les parois du corps de pompe; le clapet, en s'ouvrant à charnière, ſe trouve arrêté avant que ſon plan ſoit devenu parallèle à l'axe de la pompe; afin que la preſſion de l'eau, abandonnée à ſon poids par la deſcente du piſton, le faſſe retomber ſur l'orifice qu'il doit boucher. Cette diſpoſition rétrécit un peu l'ouverture de la ſoupape, & rejette l'eau à l'oppoſé du clapet; mais ſa réſiſtance eſt bien moindre que celle que produit la coquille, dont le poids d'ailleurs doit être ſupporté par la force motrice : il eſt vrai que la roideur de la charnière du clapet fait auſſi une réſiſtance; mais tout compenſé, la fermeture à coquille paroît moins avantageuſe, quoiqu'elle puiſſe avoir des avantages qui compenſent ſes défauts. C'eſt aux artiſtes à décider cette queſtion.

Fig. 27.

300. Suppoſons que *m* & *n* repréſentent toujours les aires de l'entrée du tuyau & de la ſoupape, diminuées de manière à donner, ſans contraction, la même dépenſe qu'elles donnent avec contraction

contraction, par leurs véritables orifices, & que les valeurs des rapports $\frac{A}{m}$, $\frac{A}{n}$ sont entre 4 & 6; ou, si l'on veut, qu'ils sont chacun égaux à 5 : si l'on fait mouvoir le piston avec une vitesse de 2 pieds par seconde, ou de 24 pouces, on aura $\frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2}+\frac{A^2}{n^2}-1\right)=\frac{576}{724}(25+25-1)=39$ pouces, à très-peu près. Ainsi la force nécessaire pour vaincre la résistance seule des orifices, avec cette vitesse, sera représentée par le poids d'une colonne d'eau de 3 pieds $\frac{1}{4}$ de hauteur dans le corps de pompe. Si donc il falloit élever l'eau à 60 pieds de hauteur, il faudroit ajouter au poids de l'équilibre environ $\frac{1}{18}$; & si l'élévation n'étoit que de 10 pieds, l'augmentation seroit égale au tiers.

301. La force nécessaire pour imprimer le mouvement & vaincre la résistance des étranglemens, étant donc de si grande conséquence, il est à desirer que les artistes, qui ont sous la main tous les instrumens nécessaires, fassent des expériences propres à déterminer l'intensité des différentes contractions, suivant la manière dont sont disposées les soupapes & l'entrée du tuyau. La pompe étant placée horizontalement, son entrée baignée dans l'eau d'un réservoir, sa soupape retenue à l'ouverture convenable, & avec une charge de réservoir connue; on combineroit la vitesse de l'écoulement avec la hauteur de la charge, & on assigneroit le rapport des différens effets, & des résistances à vaincre, avec cette hauteur, ou le quarré de la

Digitized by Google

viteſſe de l'eau dans le tuyau, qui repréſenteroit la viteſſe du piſton.

Fig. 28. 302. Dans l'uſage ordinaire, on adapte au deſſous du corps de pompe un tuyau auquel on donne le nom de *tuyau d'aſpiration* : il eſt ordinairement de bois, au lieu que le corps de pompe, qu'on nomme auſſi *pompe travaillante*, eſt de fer, & ſouvent même de cuivre. Ce tuyau, dont la longueur varie ſuivant le beſoin, eſt d'un plus petit diamètre que la pompe, & eſt chaſſé à force dedans, par ſon extrémité ſupérieure taillée en cône tronqué, au ſommet de laquelle eſt la ſoupape. Cette diſpoſition eſt avantageuſe pour l'extraction de l'eau des puits de mines qu'on approfondit, parce que, ſans déranger la pompe travaillante, qui doit être fixée très-ſolidement, on ſubſtitue, l'un après l'autre, des tuyaux d'aſpiration, dont les longueurs ſont proportionnées au progrès du déblai du puits, & peuvent aller juſqu'à 20 à 24 pieds, *fig. 28*. On voit que la contraction eſt fort diminuée à l'endroit de la ſoupape fixe, & que l'eau conſerve en y paſſant une plus grande partie de la viteſſe acquiſe le long du tuyau d'aſpiration.

303. En conſervant les mêmes dénominations que ci-deſſus (300), & nommant de plus *a* l'aire du tuyau d'aſpiration, la hauteur de la charge néceſſaire pour imprimer le mouvement & vaincre les obſtacles, deviendra $\frac{}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2}+\frac{A^2}{n^2}-\frac{A^2}{a^2}\right)$; car l'aire diminuée par la contraction à l'entrée du tuyau étant

Digitized by Google

m, la viteſſe y ſera $\frac{AV}{m}$, & la hauteur due à cette viteſſe ſera $\frac{A^2V^2}{2gm^2}$. Après ce paſſage, la viteſſe dans le tuyau d'aſpiration ſe réduit à $\frac{AV}{a}$ juſqu'à la ſoupape, où elle devient $\frac{AV}{n}$, & où elle exigeroit encore une charge égale à $\frac{A^2V^2}{2gn^2}$: mais la viteſſe conſervée dans le tuyau d'aſpiration équivaut à une charge égale à $\frac{A^2V^2}{2ga^2}$. Ainſi la charge entière ſe réduit à $\frac{A^2V^2}{2gm^2}+\frac{A^2V^2}{2gn^2}-\frac{A^2V^2}{2ga^2}=\frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{m^2}+\frac{A^2}{n^2}-\frac{A^2}{a^2}\right)$.

Pour comparer cette charge à la précédente (300), ſuppoſons que l'aire de la ſection de la pompe ſoit de 36 pouces, ou $A=36$; celle du tuyau d'aſpiration 9 pouces, ou $a=9$ pouces; l'aire diminuée de l'entrée du tuyau d'aſpiration, ou $m=6$ pouces; & l'aire diminuée de la ſoupape, ou $n=8$ pouces; on aura l'expreſſion précédente égale à $\frac{176}{724}(36+20{,}25-16)=32$ pouces, à peu de choſe près, au lieu de 39.

304. Pour juger combien il importe de ne pas faire le diamètre du tuyau d'aſpiration trop petit, en comparaiſon de celui de la pompe, ſuppoſons qu'en faiſant toujours l'aire $A=36$, on faſſe $a=4$, en ne donnant au diamètre du tuyau d'aſpiration que le tiers de celui de la pompe, on aura, dans le même rapport $m=2\frac{2}{3}$, & $n=3\frac{1}{2}$; alors l'expreſſion de la charge néceſſaire pour imprimer le mouvement, & vaincre les réſiſtances des étran-

Digitized by Google

glemens, devient $\frac{576}{724}(182,25 + 105,79 - 81) =$ $164,71^{po}$, c'eſt-à-dire plus de 13 pieds 8 pouces $\frac{1}{2}$, au lieu de 2 pieds 8 pouces que nous venons de trouver, quand le tuyau d'aſpiration avoit la moitié du diamètre de la pompe.

Il paroît donc qu'en général le diamètre de la ſoupape doit être le même que celui du tuyau d'aſpiration, & que l'un & l'autre doivent être au moins la moitié de celui de la pompe travaillante, pourvu néanmoins que la ſoupape fixée à cette grandeur ſoit aſſez ſolide pour réſiſter aux coups redoublés que lui fait frapper le poids de l'eau, chaque fois que le piſton commence à deſcendre.

305. Si la réſiſtance cauſée par les étranglemens eſt d'autant plus ſenſible que la hauteur de la pompe eſt moindre, il en exiſte au contraire un autre, qui croît réellement avec cette hauteur; c'eſt le frottement que l'eau exerce ſur toute la longueur de la pompe. A conſidérer ce frottement à la rigueur, les expériences & les données nous manquent pour le déterminer, parce qu'il eſt d'un tout autre genre que celui que l'eau exerce dans un tuyau où elle coule librement : nous avons vu qu'alors la réſiſtance des parois agit inégalement ſur les couronnes de filets qui en ſont plus ou moins diſtantes, ce qui fait qu'elles conſervent des viteſſes différentes, quoique les filets ſe meuvent parallèlement entre eux. Ici, à la vérité, toutes les molécules ſont forcées de ſuivre le mouvement du piſton, & d'avoir la même viteſſe moyenne; mais

Digitized by Google

comme celles qui effuient vers le centre moins de réſiſtance, doivent ſe mouvoir plus vîte que celles qui en éprouvent davantage vers la paroi, la ſomme de toutes les directions des filets doit faire la gerbe, ſans qu'il puiſſe y avoir de parallélifme dans leurs mouvemens. Cette irrégularité doit rendre plus grande la partie de la réſiſtance qui dépend de la viſcoſité du fluide, & du frottement des molécules entre elles. D'après cela nous propoſerons comme une conjecture probable de ſuppoſer le frottement dans la pompe égal à celui que l'eau éprouveroit dans le même tuyau, ſi elle s'y mouvoit librement avec une viteſſe moyenne telle que la viteſſe qui en réſulteroit à la paroi fût égale à celle du piſton. Suppoſons donc une pompe de 60 pieds d'élévation, avec un diamètre conſtant de 6 pouces, & une viteſſe de 2 pieds par ſeconde. Si on prend cette viteſſe pour celle qui a lieu à la paroi dans un tuyau où l'eau coule librement, on trouvera (67) que la viteſſe moyenne ſeroit de $29^{po.},4$; & ſi on cherche, par la formule du mouvement uniforme, la pente de ce tuyau, ou la hauteur de la charge employée à vaincre la réſiſtance, on trouvera qu'elle ſeroit $\frac{1}{192}$ de la longueur du tuyau, ou égale à $3^{po.},7$.

306. Cet exemple prouve aſſez que la réſiſtance occaſionnée par le frottement de l'eau eſt toujours très-foible, relativement au poids total qu'il faut mouvoir. Il en exiſte encore un autre, qui ne peut pas être beaucoup plus ſenſible, c'eſt le frottement

Digitized by Google

du piſton contre la paroi du corps de pompe. Nous ne connoiſſons point d'expériences ſur le frottement de deux ſurfaces mouillées, de différentes eſpèces, qui gliſſent l'une contre l'autre, en ſe preſſant aſſez pour interrompre le paſſage de l'eau & de l'air. Malgré cette dernière condition, il eſt probable que le frottement du piſton influe peu ſur la force motrice, ſur-tout parce que ſa partie inférieure diminue de diamètre, & ne participe pas au frottement. La longueur du piſton eſt donc indifférente pour l'intenſité du frottement qu'il éprouve; & elle offre au contraire l'avantage de diminuer la contraction de l'eau qui le traverſe ſous la forme d'un tuyau additionnel.

Si néanmoins on vouloit s'occuper du frottement de l'eau & du piſton contre les parois de la pompe, on le détermineroit par les expériences que nous avons indiquées; il ſuffiroit d'y adapter un piſton convenable, garni d'une longue tige bien unie, portée ſur des rouleaux ou cylindres très-mobiles ſur leur axe, afin de fixer le piſton, relativement à la pompe, dans la même poſition que ſi l'un & l'autre étoient dans la ſituation verticale, & de rendre le mouvement ſemblable.

307. Après avoir conſidéré l'effort relatif à l'aſcenſion du piſton, il faut examiner celui qui eſt néceſſaire pour procurer ſa deſcente, pendant laquelle la ſoupape fixe eſt fermée, & celle du piſton ouverte. Imaginons d'abord que la dernière n'exiſte pas, ou qu'elle ſoit entièrement ouverte : le piſton ne peut

Digitized by Google

descendre dans l'espace NEHO, LFGP, si la couronne sur laquelle il s'appuie ne fuit devant lui avec une vitesse égale à la sienne. Nommons V cette vitesse, A l'aire DC du corps de pompe, & a l'aire AB de l'orifice du piston, le volume d'eau déplacé par le piston pendant une seconde sera exprimé par $(A-a)V$; & ce volume est destiné à remplir l'espace égal que le piston, dans sa descente, abandonne dans sa partie supérieure : mais pour opérer ce remplacement, il faut que le fluide traverse le tuyau ABLN, où la veine se contracte. Soit nommée K l'aire de la veine contractée : pour qu'en une seconde le volume $(A-a)V$ passe par l'aire K, il faut que la force motrice produise une vitesse relative $\frac{(A-a)V}{K}$, à laquelle est due la hauteur $\frac{V^2}{2g}\left(\frac{A-a}{K}\right)^2$; cette hauteur exprime celle d'une colonne, dont la base est $A-a$, sur laquelle le piston presse pour descendre. Ainsi, la densité étant toujours D, & nommant p le poids de cette colonne, on a $p = D(A-a)\left(\frac{A-a}{K}\right)^2\frac{V^2}{2g} = \frac{DV^2(A-a)^3}{2gK^2}$. On voit que cet effort est encore proportionnel au quarré de la vitesse, & indépendant de la hauteur à laquelle l'eau est élevée au dessus du piston. Fig. 29.

Maintenant, si l'orifice est garni d'une soupape ou clapet qui se projette sur une partie de l'orifice, la quantité a ne représente plus l'aire entière, mais l'aire diminuée par le clapet; & si on substitue une coquille au clapet, on aura $a = 0$, puisque

Digitized by Google

l'eſpace que le piſton abandonne en deſſus, & le volume d'eau qu'il preſſe en deſſous, ont également pour baſe l'aire entière A du corps de pompe. Dans ce cas on a $p = \frac{DV^2A^3}{2gK^2}$.

308. Il eſt très-probable que, les diamètres du piſton & de ſon orifice reſtant les mêmes, les valeurs de l'aire contractée K varieroient dans les trois cas; c'eſt-à-dire ſans clapet, avec clapet, & avec une coquille. C'eſt à l'expérience ſeule à les fixer; & les formules précédentes ne peuvent pas repréſenter tous les effets qui ont lieu dans un mouvement auſſi compliqué, mais ſeulement ſervir de moyen pour les évaluer d'une manière ſimple & aſſez exacte. En effet, ſi on vouloit directement tenir compte du choc de la veine contre la face inférieure de la coquille ou du clapet, de la déviation & du choc oblique des particules contre la paroi, d'où elles ſont encore réfléchies vers l'axe, il ſeroit preſque impoſſible d'aſſigner les valeurs particulières de toutes ces réſiſtances. Elles ſont néanmoins compriſes dans la formule, puiſque leur effet ſe borne à diminuer l'aire de la veine contractée.

309. La pompe foulante ne diffère de la pompe aſpirante, qu'en ce que le piſton eſt placé au deſſous de la ſoupape fixe, au lieu d'être au deſſus : cette diſpoſition ne change rien aux réſultats précédens. Quant à la pompe foulante & aſpirante, ſon effet eſt abſolument égal à celui de la pompe

Digitized by Google

aſpirante, lorſque le piſton s'élève, mais en diffère dans ſa deſcente ; car le piſton eſt plein, c'eſt-à-dire qu'il n'eſt point percé intérieurement d'un orifice : l'eau qu'il chaſſe en deſſous paſſe par une ſoupape latérale, ſituée au deſſus de la ſoupape fixe, ſur la paroi du corps de pompe ; & la veine contractée ſe meut dans une direction perpendiculaire à celle du piſton. Ainſi, pour lui imprimer la viteſſe convenable, il faut ajouter à la charge $\frac{V^2}{2g}$ qui convient à la viteſſe de l'eau ſous le piſton, la hauteur $\frac{V^2A^2}{2gK^2}$; d'où l'on voit que le poids p, qui fait équilibre à cette réſiſtance, eſt alors repréſenté par $\frac{DAV^2}{2g}\left(\frac{A^2}{K^2}+1\right)$.

310. Quand on veut connoître la dépenſe d'une pompe aſpirante pendant chaque tems de la montée & de la deſcente du piſton, il faut néceſſairement avoir égard à la groſſeur de la tige de ce piſton. Si on nomme c l'aire de cette tige, t & t' les tems des deux vibrations aſcendantes & deſcendantes, e le jeu ou la relevée du piſton, on aura $(A-c)\frac{e}{t}$ pour la dépenſe par ſeconde, lorſque le piſton s'élève, & $(A-c)\,e$ pour la dépenſe totale pendant l'aſcenſion : mais quand l'aire c n'eſt pas trop petite relativement à A, il y a encore, pendant la deſcente du piſton, une dépenſe ſenſible, & exactement égale au volume d'eau que déplace la partie de la tige qui ſort, & ſe plonge alternativement dans la pompe. Ainſi la dépenſe par ſeconde

Digitized by Google

pendant la descente est égale à $\frac{ce}{t'}$; & pendant toute la descente à ce : la dépense totale pendant une vibration, composée de l'ascension & de la descente, est donc égale à Ae; & la dépense moyenne par seconde est $\frac{Ae}{t+t'}$. C'est cette dernière valeur qui peut servir à déterminer la dépense d'une pompe pendant un tems donné. On voit d'ailleurs que la grosseur de la tige n'influe point sur la dépense totale, & que la pompe rend, pendant la descente du piston, ce qu'elle a gardé pendant sa montée; d'où il suit une construction bien simple, pour rendre régulière la dépense d'une pompe, sans en diminuer la quantité. Il suffit qu'on ait l'équation $(A-c)\frac{e}{t}=\frac{ce}{t'}$, ou $c=\frac{At'}{t'+t}$. Si les demi-vibrations sont égales, on aura $c=\frac{1}{2}A$; si le tems de l'ascension est double de celui de la descente, ou $t=2t'$, comme cela arrive souvent dans les pompes à bras, il faut qu'on ait $c=\frac{1}{3}A$. Au reste, il sera toujours facile de déterminer les valeurs de t & t', quand on connoîtra les dimensions de la pompe, le jeu du piston, & les forces qu'on veut lui appliquer, puisque, dans les deux cas, ces valeurs sont représentées par $\frac{e}{V}$.

311. Il ne suffit pas d'avoir déterminé l'excès d'équilibre dans les pompes, ou le poids capable de mouvoir l'eau & de vaincre les obstacles qu'elle rencontre avec une vitesse donnée; ce n'est que par degré que cette masse excédante, abandonnée

Digitized by Google

à ſa peſanteur, peut communiquer un mouvement qui s'accélère de moins en moins; parce que les réſiſtances croiſſent comme le quarré de la viteſſe, & que celle-ci ne peut devenir ſenſiblement uniforme, que quand la réſiſtance eſt parvenue à détruire l'effet de la gravité dans ce poids moteur. Cette uniformité ſenſible du mouvement a lieu après un tems & un eſpace parcouru, plus ou moins long, ſuivant l'intenſité de la réſiſtance. Plus la réſiſtance eſt grande, relativement au poids moteur, plus tôt le mouvement devient uniforme; & comme les plus grandes viteſſes qu'on procure à l'eau dans les pompes ſont bornées à deux ou trois pieds par ſeconde, cela ſuppoſe toujours une réſiſtance conſidérable, en comparaiſon du poids; de ſorte que le mouvement devient ſenſiblement uniforme, au bout d'un tems fort court. Il ſuit de là que, dans la plupart des cas, on peut, ſans grande erreur, ſuppoſer que la viteſſe eſt uniforme dès le commencement ou l'origine du mouvement, & ſe ſervir de la théorie précédente, ſans autre changement que d'augmenter un peu l'excès d'équilibre pour vaincre le frottement; mais comme en cela on s'écarte toujours un peu de la préciſion, & qu'il eſt des cas où il devient important de tenir compte des tems & des eſpaces qui ſe trouvent perdus, tandis que le mouvement devient uniforme, nous donnerons ici, pour les lecteurs familiariſés avec les principes de la Dynamique, une manière plus exacte d'évaluer le mouvement de l'eau dans les pompes.

Digitized by Google

312. Dans les machines hydrauliques le piſton deſcend ordinairement par ſon propre poids dans l'eau, ou par l'action de ceux dont il eſt chargé; mais on emploie, pour le faire monter avec la colonne d'eau qu'il ſoulève, la force des animaux ou des maſſes abandonnées à leur peſanteur, ou plus communément des agens naturels, tels que la force du vent, l'impulſion d'un courant, ou la preſſion de l'atmoſphère. De quelque eſpèce que ſoient ces puiſſances, elles agiſſent toujours ſur des maſſes qu'il faut mouvoir par le moyen des machines, ou d'un aſſemblage de leviers, dont les combinaiſons ſont du reſſort de la mécanique. Nous ne conſidérerons ici cette communication de mouvement que de la manière la plus ſimple, & telle qu'on l'emploie dans les pompes à feu.

Fig. 30. 313. Soit AB un balancier horizontal, qui tourne librement ſur le point fixe C ſitué dans ſon milieu, & garni à ſes extrémités d'arcs verticaux DE, FG, décrits du même centre C; c'eſt aux ſommets F & D de ces arcs que ſont attachées les cordes ou chaînes DBM, FAP, auxquelles ſont fixées les puiſſances & les maſſes à mouvoir dans une direction verticale. Les ſecteurs CDE, CFG appartiennent à une grande poulie, qui auroit pour diamètre la longueur même du balancier; d'où il ſuit que le mouvement ſe communique d'une tête à l'autre, comme ſi la poulie entière exiſtoit, & que la chaîne fût roulée ſur la demi-circonférence ſupérieure. Cela poſé, on concevra aiſément la propoſition ſuivante de Dynamique.

Digitized by Google

314. Si on attache aux cordes AP, BM deux maſſes inégales, P la plus petite & M la plus grande, & qu'on n'ait point d'égard à l'inertie du balancier, ni à ſon frottement ſur l'axe C, les maſſes ſe mouvront, l'une pour monter, l'autre pour deſcendre, avec la même viteſſe uniformément accélérée, moindre que celle qui ſeroit due à la gravité naturelle, ſi elles étoient libres; car l'excès de la maſſe M ſur la maſſe P eſt la ſeule force motrice qui anime la ſomme M+P des maſſes. Repréſentons par Mdg & Pdg la quantité de mouvement, ou la force qu'elles auroient acquiſe à chaque inſtant, en vertu de la peſanteur, & décompoſons la première en deux parties, dont l'une, égale à Pdg, eſt détruite par la force oppoſée, & l'autre, égale à dg(M−P), eſt la force ou la quantité de mouvement acquiſe à chaque inſtant par le ſyſtême des deux maſſes; la viteſſe, qui eſt égale à la quantité de mouvement diviſée par la maſſe, ſera repréſentée à chaque inſtant par $\frac{dg(M-P)}{M+P}$.

La maſſe P reſtant la même, s'il n'y avoit en M qu'une force ou preſſion, dont l'effet fût égal à celui que produiroit la gravité ſur une maſſe M, la quantité de mouvement acquiſe par la ſeule maſſe P ſeroit toujours égale à dg(M−P); mais la viteſſe acquiſe à chaque inſtant ſeroit $dg\frac{(M-P)}{P}$. En général, de quelque manière que ſe combinent les maſſes & les forces qui agiſſent ſur les extrémités du balancier, en repréſentant ces dernières par le

Digitized by Google

mouvement que la gravité abſolue auroit communiqué à des maſſes données, on pourra toujours faire la proportion ſuivante : la viteſſe acquiſe à chaque inſtant pour tout le ſyſtême, eſt à celle qu'auroit communiquée la gravité abſolue, comme la différence entre la ſomme des forces du côté prépondérant, & la ſomme de celles de l'autre côté, eſt à la ſomme ſeulement des maſſes en mouvement.

Si la maſſe P étoit plongée dans l'eau, & y perdoit une partie de ſon poids, on pourroit conſidérer le mouvement que la gravité abſolue communiqueroit à la maſſe d'eau déplacée, comme une force agiſſant de B en M ; & il en ſeroit de même ſi une partie du poids de la maſſe P étoit employée à vaincre une réſiſtance, avec cette différence, que cette force agiroit toujours en ſens contraire du mouvement de la maſſe P, & qu'elle ſeroit variable ſi la réſiſtance étoit relative à la viteſſe.

315. Ceci étant bien conçu, reprenons l'expreſſion de la réſiſtance qui s'oppoſe au mouvement du piſton. Les différentes valeurs (297, 307 & 308) de la réſiſtance, dans les différens cas que nous avons examinés, peuvent ſe réduire au poids d'un volume d'eau qui auroit pour baſe l'aire du piſton diminuée, s'il eſt néceſſaire, de celle de ſon orifice, & pour hauteur un certain nombre de fois celle qui eſt due à la viteſſe : ce nombre, toujours relatif au rapport entre l'aire du corps de pompe

Digitized by Google

& celle de la veine contractée aux soupapes, ou l'aire du tuyau d'aspiration, peut s'exprimer en général par i^2. Ainsi le poids capable de vaincre la résistance, quand elle aura toute son intensité, sera égal à $\frac{ADi^2V^2}{2g}$, que nous nommerons p; mais dans les machines ce poids excédant existe dès le commencement du mouvement, tandis que la résistance croît jusqu'à ce qu'il soit parvenu à l'uniformité; d'où il suit que le véritable excès d'équilibre à chaque instant est représenté par $p - \frac{ADi^2V^2}{2g}$. Cette valeur exprime aussi la différence des forces qui agissent dans des sens opposés sur les bras du balancier. Soit P la somme des masses en mouvement, dans lesquelles sont comprises celles qui peuvent se trouver du côté M, le poids du piston & de ses attirails dans le vide, & de plus le poids de la colonne élevée quand le piston monte; gdt représente la vitesse que la gravité absolue tend à produire, & dV représente celle qui est réellement acquise par tout le systême pendant le tems dt: on a donc l'équation $dV = \frac{\left(p - \frac{ADi^2V^2}{2g}\right)gdt}{P}$; d'où $dt = \frac{PdV}{pg - \frac{ADi^2V^2}{2}} = \frac{2PdV}{2gp - ADi^2V^2}$. Pour simplifier faisons $2gp = q^2$, & $ADi^2 = \frac{1}{r^2}$; l'équation se réduira à $dt = \frac{2Pr^2dV}{q^2r^2 - V^2}$: la fraction $\frac{1}{q^2r^2 - V^2}$ peut se décomposer en deux termes, qui sont $\frac{1}{qr + V}$ & $\frac{1}{qr - V}$, mul-

tipliés par le facteur commun $\frac{1}{2qr}$; d'où il suit que $dt = \frac{2Pr^2 dV}{2qr}\left(\frac{1}{qr+V} + \frac{1}{qr-V}\right) = \frac{Pr}{q}\left(\frac{dV}{qr+V} - \frac{-dV}{qr-V}\right)$. L'équation ainsi préparée s'intègre facilement, puisque dans chaque fraction variable, le numérateur est la différentielle du dénominateur. Ainsi $t = \frac{Pr}{q}\log.\left(\frac{qr+V}{qr-V}\right)$. La constante ici est nulle, puisqu'en faisant t & $V = 0$, comme cela a lieu au commencement du mouvement, le second terme de l'équation devient nul aussi. Nommant C le nombre dont le logarithme hyperbolique est égal à 1, on aura

$$C^{\frac{tq}{Pr}} = \frac{qr+V}{qr-V}, \text{ \& } V = \frac{qr\left(C^{\frac{tq}{Pr}} - 1\right)}{C^{\frac{tq}{Pr}} + 1};$$

ou en nommant N le nombre dont le logarithme hyperbolique est $\frac{tq}{Pr} = \frac{t\sqrt{2gpADi^2}}{P}$, on aura $V = qr\left(\frac{N-1}{N+1}\right) = \sqrt{\frac{2gp}{ADi^2}}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)$; d'où l'on voit que la vitesse est sensiblement uniforme, & se réduit à l'expression qu'on tireroit des premières formules du mouvement uniforme, quand la valeur de $\frac{t}{p}\sqrt{2gpADi^2}$ ou log. N excède cinq ou six unités.

316. Pour déterminer l'espace exprimé par e, qui seroit parcouru au bout du tems t, on pourra considérer l'espace infiniment petit de comme parcouru uniformément pendant l'instant dt. Ainsi on aura

Digitized by Google

aura $\frac{de}{dt} = V = \frac{qr\left(C^{\frac{tq}{Pr}}-1\right)}{C^{\frac{tq}{Pr}}+1}$, & $\frac{de}{qr} = \frac{dtC^{\frac{tq}{Pr}}}{C^{\frac{tq}{Pr}}+1} - \frac{dt}{C^{\frac{tq}{Pr}}+1} = \frac{dtC^{\frac{tq}{Pr}}}{C^{\frac{tq}{Pr}}+1} - \frac{dtC^{\frac{-tq}{Pr}}}{1+C^{\frac{-tq}{Pr}}}$: multipliant chaque terme par $\frac{q}{Pr}$, on aura $\frac{de}{Pr^2} = \frac{\frac{qdt}{Pr}C^{\frac{tq}{Pr}}}{C^{\frac{tq}{Pr}}+1} + \frac{\frac{-qdt}{Pr}C^{\frac{-tq}{Pr}}}{1+C^{\frac{-tq}{Pr}}}$.

Sous cette forme, les numérateurs, dans les deux fractions du second terme, sont les différentielles de leurs dénominateurs; de sorte qu'en intégrant, on a $\frac{e}{Pr^2} = \log.\left(C^{\frac{tq}{Pr}}+1\right) + \log.\left(C^{\frac{-tq}{Pr}}+1\right) + C = \log.\left(C^{\frac{tq}{Pr}}+1\right) + \log.\left(\frac{1+C^{\frac{tq}{Pr}}}{C^{\frac{tq}{Pr}}}\right) + C = \log.\left(\frac{\left(C^{\frac{tq}{Pr}}+1\right)^2}{C^{\frac{tq}{Pr}}}\right) + C$. Pour déterminer la constante, on voit que e devenant zéro, lorsque $t = 0$, on a $C = -L.2^2 = -2L.2$. Ainsi $\frac{e}{Pr^2} = \log.\left(\frac{(N+1)^2}{N}\right) - 2L.2 = 2\log.\left(\frac{N+1}{\sqrt{N}}\right) - 2L.2$; & enfin $e = 2Pr^2\left(L.\left(\frac{N+1}{\sqrt{N}}\right) - L.2\right) = 2Pr^2 \log.\frac{N+1}{2\sqrt{N}}$; & en substituant à r^2 sa valeur $\frac{1}{ADi^2}$, on a $e = \frac{2P}{ADi}\log.\frac{N+1}{2\sqrt{N}}$.

Application de ces formules.

317. Quelles que ſoient les forces appliquées au piſton, ſoit qu'il monte, ſoit qu'il deſcende, on peut déterminer ſon mouvement par les formules précédentes, qui ſont générales. La ſeule difficulté conſiſte à trouver la valeur du tems, ou de toute autre quantité contenue dans la valeur de L.N, lorſque toutes les autres ſont données ; mais le nombre N étant le plus ſouvent très-conſidérable, on peut preſque toujours prendre N pour N + 1, ſauf à corriger les réſultats par une ſeconde opération. On a donc alors $\frac{ADi^2e}{2P} = \frac{L\sqrt{N}}{2} = \frac{1}{2}L.N - L.2$, & $2\left(\frac{ADi^2e}{2P} + L.2\right) = L.N = \frac{t\sqrt{2gpADi^2}}{P}$; équation d'où l'on tire très-aiſément la valeur très-rapprochée du tems.

Les circonſtances ne nous ayant pas permis de faire à cet égard des expériences, nous en rapporterons quelques-unes, d'après les obſervations faites par M. le Chevalier de Borda, ſur des pompes de différentes eſpèces. Voyez les Mémoires de l'Académie, années 1768 & 1771. La première nous ſervira à faire l'application d'un problême, dont voici l'énoncé.

PROBLÊME.

318. Déterminer le mouvement d'un piſton qui ſe meut par ſon propre poids dans un corps de

Digitized by Google

pompe vertical, rempli d'eau, quand on connoît ſa maſſe, ſon poids dans l'eau, ſon diamètre, & celui de ſa ſoupape.

Nous nous ſervirons des données de M. de Borda. Cet Académicien a examiné entre autres une pompe employée au ſervice des vaiſſeaux, dont le diamètre intérieur étoit de 6 pouces, & celui de la ſoupape fixe de $3^{po.},5$; ce qui donne le rapport des aires : : 3 : 1 ; mais à cauſe de la contraction, qu'il eſtime pour les ſoupapes ordinaires de 3 à 2, ce rapport devient : : $4\frac{1}{2}$: 1. Il eſtime de même que les aires du piſton & de ſa ſoupape, en y comprenant la contraction, étoient : : 6 : 1, ce qui ſuppoſe le véritable orifice du piſton d'environ 3 pouces de diamètre. C'eſt avec cette pompe, &, à ce qu'il paroît, avec le même piſton, qu'il fit l'expérience ſuivante. Ayant enlevé le clapet du piſton, on appliqua ſur l'ouverture de la ſoupape une plaque de fer blanc, percée d'une ouverture de 18 lignes de diamètre : le piſton chargé de poids peſoit dans l'eau 41 livres; & comme il déplaçoit un volume d'eau d'un demi pied cube, ſon poids total étoit de 77 livres, ce qui ſuppoſe qu'il étoit plongé dans de l'eau de mer; ce piſton, abandonné à ſon propre poids, eſt tombé conſtamment de 4 pieds en 6 ſecondes.

D'après ces données, $t = 6''$, $p = 41$ livres, $P = 77$ livres, $D = 72$ livres, A repréſente ici l'aire du piſton (315), moins celle de l'orifice de 18 lig.;

ce qui donne $A = \frac{26^{pi.},5}{144}$. Quant à la valeur de i, qui, comme nous l'avons vu, exprime le rapport entre la vitesse du piston & celle de l'eau au passage de la soupape, à l'endroit où la veine est contractée, & que nous avons exprimé par $\frac{A-a}{K}$, elle dépend de la valeur de K, qui est l'aire de cette veine contractée. Comme le clapet ne gênoit point le mouvement, puisqu'il étoit supprimé, c'est avec raison que M. le Chevalier de Borda a supposé une contraction moindre que dans les autres pompes; & au lieu du rapport de 3 à 2, il n'a diminué l'aire a que dans celui de 14 à 10. D'après ces données, on trouve $i = 21$; & en prenant 60 pi. $\frac{1}{3}$ pour la valeur de $2g$, on aura $t \frac{\sqrt{2gpADi^2}}{P}$, ou $L.N = 296,25$, qui répond à un nombre si considérable, qu'on peut prendre N pour $N+1$. Ainsi $e = \frac{2P}{ADi^2}(\frac{1}{2}L.N - L.2) = 3^{pi.},885$, au lieu de 4 pieds qu'on a trouvés par l'expérience. Mais il nous paroît que M. de Borda a estimé la contraction encore un peu trop forte pour une veine fluide, qui passe d'un tuyau de 6 pouces à un orifice de 18 lignes; sur-tout si la plaque de fer blanc étoit placée sur la face supérieure du piston, ensorte que l'eau passât par un tuyau de 3 pouces, avant de parvenir à l'orifice. Si on estimoit $K = \frac{3}{4}a$, au lieu de $\frac{10}{14}$, on trouveroit $e = 4^{pi.},079$; & la différence de ce résultat avec celui de l'expérience pourroit être

Digitized by Google

attribuée au frottement du piston dont nous n'avons pas tenu compte.

Si, d'après ces dernières données, en faisant $e=$ 4 pieds, on calculoit la valeur du tems, on auroit

$$t=2\left(\frac{ADi^2e}{2P}+L.2\right)\frac{P}{\sqrt{2gpADi^2}}=\frac{e\sqrt{ADi^2}}{\sqrt{2gp}}+\frac{2PL.2}{\sqrt{2gpADi^2}}.$$

Le premier terme de cette expression, qui est la valeur du tems, en supposant le mouvement uniforme dès l'origine, est égal à 5″,856, & le second relatif au mouvement varié, n'est que de 0″,029; ce qui donne $t=5'',885$. Ainsi on voit que dans cette expérience le mouvement étoit sensiblement uniforme, puisqu'au bout du premier dixième de seconde, la vitesse ne différoit que de $\frac{1}{50}$ de ce qu'elle étoit à la fin du mouvement. Il est vrai que dans les pompes ordinaires la résistance n'est pas aussi considérable; mais elle l'est souvent assez pour négliger la variété du mouvement.

Calculs sur la force nécessaire pour mouvoir une machine à feu.

319. Pour faire une application plus utile de cette théorie, nous allons encore examiner, d'après les observations de M. le Chevalier de Borda, les pompes établies à la mine de charbon de Montrelais près d'Ingrande sur Loire. C'est par le moyen d'une machine à feu, qui les fait mouvoir, qu'elles élèvent l'eau de 612 pieds de profondeur, avec dix répétitions de pompes aspirantes, d'environ

Digitized by Google

61 pieds de hauteur chacune. Le cylindre de la machine a 56 pouces anglois de diamètre intérieur, qui répondent à 52 $\frac{1}{2}$ de France; les pompes ont 8 pouces 6 lignes de diamètre; l'aire de chaque piston est à l'aire de la soupape: : 4 : 1; mais à cause de la contraction, M. de Borda l'estime : : 6 : 1. Quant au rapport de cette aire avec celle des soupapes fixes, il l'établit : : 5 : 1, eu égard aux contractions; & il estime qu'une grille placée au bas de chaque corps de pompe, pour le garantir des corps étrangers, fait le même effet que la soupape fixe: la section de la tige de chaque piston est le tiers de l'aire du corps de pompe; le jeu du piston est de 6 pieds 3 pouces; & la machine donne neuf coups de piston par minute. Ainsi chaque vibration dure $6''\frac{2}{3}$; mais comme il se fait un repos d'une demi-seconde entre l'aller & le venir, pour monter ou pour descendre, il faut réduire à $5''\frac{2}{3}$ le tems de chaque vibration, & à $2''\frac{5}{6}$ celui des demi-vibrations qui sont isocrhônes. Le poids des attirails des pompes, compris celle de la *bache*, autrement nommée *jaquette*, est évaluée à 6000 livres, déduction faite de la plus grande partie supportée par un contrepoids, qui empêche les pistons de descendre trop vîte.

320. Telles sont les données que nous avons sur cette machine, d'après lesquelles nous en estimerons plusieurs autres, qu'il seroit important de connoître plus exactement. Le poids du piston du cylindre, & de la chaîne qui le suspend à la tête du

Digitized by Google

balancier, eſt encore augmenté par celui d'un volume d'eau qui recouvre ordinairement le piſton, ſur deux pieds de hauteur, pour intercepter tout paſſage à l'air extérieur dans le cylindre. Toute cette maſſe, que nous nommerons en général le poids du piſton du cylindre, peut être évaluée à 3000 livres; & il y a apparence qu'il eſt déduit du poids des attirails des pompes, ainſi que le contrepoids qui en modère la deſcente. Nous évaluons ce contrepoids à 4000 livres, mues avec la même viteſſe que le piſton; de ſorte qu'ajoutant ces deux poids à l'excès de celui des attirails des pompes, ceux-ci pèſent 13000 liv., dont la majeure partie eſt ſoutenue par les contrepoids: l'aire des piſtons eſt de $0^{pi.},39406$, qui, multipliés par 612 pieds & par 70 livres, pour la denſité de l'eau, donnent 16880 livres pour le poids de l'eau qu'ils ſoulèvent. Ainſi, en ſuppoſant que la partie des tiges des piſtons, qui plonge dans l'eau, pèſe, avec les ferrures, autant que l'eau qu'elle déplace, on trouve que le poids total des maſſes qui ſe meuvent, quand les piſtons montent, eſt égal à $3000+4000+13000+16880$ livres, ou bien $P=36880$ livres. Quand au contraire les piſtons deſcendent, la ſomme des maſſes en mouvement eſt d'abord égale aux trois premières, qui font 20000 livres, à quoi il faut ajouter la maſſe de la partie plongée des tiges & des piſtons, que nous pouvons évaluer à un peu moins du tiers de l'eau élevée, ou à 5600 livres; de ſorte que, pendant la deſcente des piſtons, on

Digitized by Google

a $P = 25600$ livres. Nous négligeons l'inertie des deux bras égaux du balancier, & le frottement de son axe, qui ne peuvent faire qu'une foible partie de la résistance totale.

321. D'après toutes ces données, examinons quel est l'excès de l'équilibre, ou la force p, nécessaire pour mouvoir les pistons des pompes, en commençant par leur descente. La différence entre l'aire du piston & celle de la soupape, ou $A = 0^{pi.},394 - 0^{pi.},098 = 0^{pi.},296$. Cette quantité devroit être un peu plus grande, à cause du rétrécissement causé par le clapet; mais l'erreur est à-peu-près compensée, en faisant le rapport entre la différence de ces aires & celle de la veine contractée $:: 6 : 1$, rapport qui est un peu trop fort, puisque c'est celui de l'aire entière du piston à celle de la veine contractée. Ainsi, pour chaque pompe $i^2 = 36$; & en considérant les dix pompes à la fois, la vraie valeur de ce nombre abstrait est dix fois plus grande, c'est-à-dire 360; $e = 6^{pi.},25$, & $t = 2'' \frac{1}{8}$. En employant l'équation (317), $2\left(\frac{ADi^2e}{2P} + L.2\right) = L.N$, on trouvera que le nombre N est assez petit pour qu'une unité ajoutée y soit sensible; & il faut alors le déterminer avec précision, par l'équation $e = \frac{2P}{ADi^2} \log. \frac{N+1}{2\sqrt{N}}$, qui donne $\frac{ADi^2e}{2P} = \log. \frac{N+1}{2\sqrt{N}}$. On peut, pour abréger, faire $\frac{ADi^2e}{2P} = b$; & on aura $b \log. C = \log. \frac{N+1}{2\sqrt{N}}$, & $C^b = \frac{N+1}{2\sqrt{N}}$; d'où l'on tire

Digitized by Google

$\sqrt{N} = C^b + \sqrt{C^{2b} - 1} = 4,7864$; $N = 22,91$; & $\log. N = 3,12804$; mais $\log. N = \frac{t\sqrt{2gpADi^2}}{P} = 0,07425\sqrt{p}$; d'où il ſuit que $p = 1775$ livres.

Si, pour avoir égard au frottement des piſtons, à l'inertie du balancier, & au frottement de ſon tourillon, on ajoutoit 75 livres au poids moteur qu'on vient de trouver, l'excès d'équilibre néceſſaire pour produire le mouvement, quand les piſtons des pompes deſcendent, n'iroit encore qu'à 1850 livres, au lieu qu'il ſemble que l'expérience le donne de 6000 livres; mais c'eſt en ſuppoſant que le reſſort de la vapeur dans le cylindre fait équilibre à la preſſion totale de l'atmoſphère ſur ſon piſton, lorſque celui-ci s'élève. C'eſt ce que nous examinerons tout-à-l'heure, après avoir conſidéré le mouvement pendant la demi-vibration ſuivante, c'eſt-à-dire, quand le piſton du cylindre deſcend, & que ceux des pompes remontent.

322. Nous avons vu (319) qu'alors e & t reſtent les mêmes, & qu'on a $P = 36880$ livres; $A = 0^{p.},394$; $\frac{A}{m} = \frac{A}{n} = 5$; d'où (297) on conclut $i^2 = \frac{A^2}{m^2} + \frac{A^2}{n^2} - 1 = 49$. Si on veut de plus tenir compte du frottement de l'eau dans la pompe (305), on trouvera que, pour une longueur de 61 pieds, la hauteur due au frottement dans ce tuyau eſt environ triple de celle qui eſt due à la viteſſe, du moins pour des viteſſes de 2 à 3 pieds par ſeconde. Ainſi $i^2 = 52$, pour chaque pompe, & pour les dix

Digitized by Google

pompes ensemble $i^2 = 520$: substituant ces valeurs dans les équations précédentes (321), on aura $\sqrt{N} = 6,5894$, & $L.N = 3,7667 = \frac{t\sqrt{2gpADi^2}}{P}$; d'où l'on déduit $p = 2778$ livres ; & en ajoutant 122 livres pour les autres résistances, le poids moteur seroit en nombre rond de 2900 livres.

Pour évaluer celui qui paroît réellement avoir lieu, on a d'un côté le poids des pistons estimé à 6000 livres, déduction faite de la partie soutenue par les contrepoids, & le poids de l'eau élevée, qui est de 16880 livres ; ce qui fait ensemble, du côté des pompes, 22880 livres. De l'autre côté est la pression de l'air sur le piston du cylindre, qu'on estime ordinairement être égale au poids d'une colonne d'eau, qui auroit pour base l'aire du cylindre, & une hauteur de 32 pieds. Cet effort seroit de 33675 livres ; ou seulement 33300 dans l'état moyen de l'atmosphère. Ainsi il y auroit, suivant ce calcul, un excès d'équilibre de 10420 livres, tandis qu'il ne devroit être que de 2900 livres.

Observations sur les effets de la pression de l'air, & sur l'effort des vapeurs dans les machines à feu.

323. Les différences que nous venons de remarquer dans l'excès d'équilibre, suivant la théorie, & suivant les résultats apparens de l'expérience, soit lorsque les pistons montent, soit quand ils descendent, prouvent que les effets de la machine à feu ne sont pas aussi connus qu'on se

Digitized by Google

l'imagine. Six mille livres de poids moteur, quand les piſtons deſcendent, & plus de dix mille livres, quand ils montent, devroient produire un mouvement plus prompt, & raccourcir de beaucoup le tems des demi-vibrations; la dernière devroit ſe faire en moins de tems que la première, puiſque la force motrice eſt plus grande : il faut donc qu'on faſſe dans l'évaluation des forces quelque ſuppoſition gratuite, dont un examen plus réfléchi pourroit démontrer la fauſſeté. En effet, on ſuppoſe 1°. que le reſſort de la vapeur qui paſſe de la chaudière dans le cylindre, agit contre la face inférieure du piſton, avec la même force que celle que l'air exerce par ſa preſſion ſur la face ſupérieure, & que la première détruit en entier la ſeconde. 2°. Qu'après l'injection de l'eau froide, la vapeur eſt entièrement condenſée; que le vide eſt parfait dans le cylindre, & que l'air exerce toute ſa preſſion ſur le piſton. Il eſt vrai que ces effets ſont le but qu'on ſe propoſe, mais ils n'ont lieu qu'en partie.

324. Il ne faut qu'une chaleur médiocre pour réduire l'eau en vapeurs : une maſſe de ces vapeurs étant renfermée dans un récipient clos, ſon reſſort augmentera à meſure qu'on y appliquera une plus grande chaleur; & réciproquement le moindre refroidiſſement doit le faire diminuer : c'eſt ce qui arrive à la vapeur, lorſqu'elle paſſe de la chaudière dans le cylindre. D'après les obſervations que nous fîmes, il y a quelques années, aux machines à feu des environs de Condé, nous reconnûmes que

Digitized by Google

la vapeur fait monter l'eau de la chaudière 6 à 7 pieds plus haut que ſon niveau, dans un tuyau vertical, qu'on nomme tuyau d'épreuve, dont le bout inférieur trempe dans l'eau bouillante, & le ſupérieur ſort du chapiteau de la chaudière, après l'avoir traverſé. On concluroit d'abord de cette obſervation que la force du reſſort de la vapeur eſt à celle du reſſort de l'air : : 38 $\frac{1}{2}$: 32. Mais ſi l'on fait réflexion que l'eau bouillante à l'air eſt dilatée de $\frac{1}{27}$, & que celle de la chaudière étant plus chaude que l'eau bouillante, doit être encore plus dilatée, on peut croire que la preſſion de l'air en ſoutiendroit une colonne de 33 pieds $\frac{1}{2}$ de hauteur : or, la force de la vapeur ſoutient un excédant de 6 pieds $\frac{1}{2}$. Ainſi le rapport des preſſions eſt : : 40 : 33 $\frac{1}{2}$.

325. Lorſque le régulateur s'ouvre, la vapeur s'échappant avec une viteſſe prodigieuſe, remplit en un inſtant l'eſpace compris entre le deſſous du piſton & le fond du cylindre : c'eſt un moment de repos, pour changer le mouvement de toute la machine. Dès-lors la vapeur commence à ſe refroidir, & à ſe condenſer un peu par le contact de l'eau froide, qui a été produite par l'injection précédente, & des parois du piſton, & du bas du cylindre ; elle conſerve néanmoins aſſez de force pour ſoulever une ſoupape chargée de l'air extérieur. Mais dès que le piſton monte, la ſoupape reſte conſtamment fermée, ce qui annonce que la preſſion de l'air atmoſphérique eſt dominante. On

Digitized by Google

en peut juger par la cohibition de la fumée, qui se faisoit jour par les joints du chapiteau de la chaudière : cette fumée se trouve réprimée pendant l'ascension du piston, & ne reparoît que quand le régulateur se ferme ; le refroidissement de la vapeur augmente, tandis que le piston continue de monter ; & à cette cause de la diminution du ressort se joint celle d'un plus grand espace à occuper. Quand le piston est parvenu à sa plus grande élévation, l'espace cylindrique qu'occupent les vapeurs est à-peu-près égal au $\frac{1}{5}$ de la capacité du chapiteau de la chaudière, compris au dessus de l'eau bouillante. Si donc, pendant l'ascension du piston, l'eau de la chaudière ne formoit pas de nouvelles vapeurs, l'expansion de celles que contient le chapiteau, dans un espace plus grand de $\frac{1}{5}$, suffiroit pour rendre leur ressort un peu moindre que celui de l'air : mais cette cause, combinée avec le refroidissement de la vapeur, fait que la totalité de la vapeur, y compris même celle que la chaudière fournit constamment, perd considérablement de son ressort ; & qu'une partie de la pression de l'atmosphère s'oppose à l'ascension du piston, en faisant équilibre à l'excès des poids dont est chargée l'autre extrémité du balancier.

Dans la pompe que nous venons d'examiner, l'excès d'équilibre pour faire descendre les pistons, n'est que de 1850 livres ; mais l'attirail de ces mêmes pistons pesant 6000 livres, il faut que l'air extérieur agisse sur le piston du cylindre, avec une

Digitized by Google

force de 4150 livres, c'eſt-à-dire égale au $\frac{1}{8}$ de la preſſion totale, de ſorte que la vapeur perdant environ $\frac{1}{4}$ du reſſort qu'elle avoit dans la chaudière, ne ſoutient que les $\frac{7}{8}$ de la preſſion de l'atmoſphère ; & ſa force équivaut alors au poids d'une colonne d'eau, qui auroit 28 pieds de hauteur.

326. Lorſque le régulateur ſe ferme, & que l'injection d'eau froide a lieu, quoique la viteſſe du jet ſoit très-conſidérable, & qu'il ſe diviſe à l'infini, après avoir frappé le piſton, il ne paroît pas que l'intérieur du cylindre puiſſe ſe refroidir ſubitement, en condenſant entièrement la vapeur, & lui ôtant tout ſon reſſort. L'expérience apprend que la maſſe d'eau qui baigne le deſſus du piſton, & dont la ſurface touche l'air extérieur, reſte toujours très-échauffée; la maſſe du cylindre, qui ſe trouve beaucoup plus près de la chaudière, doit conſerver par conſéquent aſſez de chaleur, malgré l'injection, pour empêcher la condenſation totale, & ôter à la preſſion de l'atmoſphère une partie de ſon intenſité. Le piſton du cylindre ſe trouve donc en partie ſoutenu par le reſſort d'un fluide, très-rare à la vérité, mais bien différent d'un vide parfait. En effet, nous avons vu que des 33300 livres; qui repréſentent la preſſion totale de l'atmoſphère ſur le piſton du cylindre, il ne s'en trouve que 22880 livres, qui ſoient contre-balancées par le poids & l'attirail des piſtons des pompes ; il faut encore 2900 livres

Digitized by Google

pour imprimer le mouvement à la machine : il en reste donc 7520, qui contre-balancent le ressort de la vapeur refroidie. Ainsi cette vapeur conservant encore les $\frac{1}{16}$ du ressort qu'elle avoit dans la chaudière, fait perdre à l'air environ les $\frac{2}{9}$ de sa pression, & la réduit au poids d'une colonne d'eau qui auroit 25 pieds de hauteur.

327. Il seroit curieux d'observer tous ces effets, par une expérience immédiate, avec l'appareil suivant. ABCD représente le cylindre d'une machine à feu : vers sa partie inférieure, entre le fond & le point de la plus grande descente des pistons, est un tuyau EF, garni d'un godet G, au fond duquel est une soupape, qu'on nomme *reniflante ;* elle sert à évacuer l'air & les vapeurs qui restent dans le cylindre, quand elle est soulevée à la main, pour mettre la machine en jeu, ou par la force des vapeurs, quand le régulateur s'ouvre. Ayant percé une ouverture au point F, on y adaptera un tuyau recourbé FRH, qui se joindra aux deux tubes de verre HK, IK, appliqués verticalement sur une planche graduée MLON, & joints en K par une boule creuse ; le bout H communiquera à volonté avec l'air extérieur, & avec l'intérieur du cylindre, par le moyen d'un robinet placé en R, tandis que l'autre extrémité I sera toujours ouverte. Ces deux tuyaux auront ensemble environ 80 pouces de développement ; & on y introduira une colonne de mercure de quarante Fig. 31.

Digitized by Google

pouces de longueur, qui se tiendra d'abord de niveau de P en Q, quand le robinet sera fermé. Quand au contraire on l'ouvrira, l'air contenu de R en Q se mêlera avec la vapeur; & après plusieurs coups de piston, sortira par la soupape reniflante. C'est alors que les différentes positions du mercure indiqueront tous les états de la vapeur. Quand le régulateur sera ouvert, on verra le mercure s'élever dans le tuyau KI, avec une différence de niveau qui excédera d'abord 28 pouces; mais il s'abaissera pendant l'ascension du piston, & se tiendra peut-être à 24 pouces. Après l'injection de l'eau froide, le mercure s'élèvera dans la branche KH, avec une différence de niveau moindre que 28 pouces, variable peut-être pendant la durée de la descente du piston, & qui se réduira peut-être à 22 pouces. La boule creuse K, qui communiqueroit aux deux tuyaux par des orifices moindres que leurs aires, empêcheroit les grands balancemens du mercure, en lui opposant deux étranglemens successifs. Il est donc probable que cet instrument donneroit assez exactement les différen rapports entre le ressort de la vapeur & la pression de l'air, pour toutes les positions du piston; & l'on ne peut disconvenir que cette connoissance ne soit bien importante pour perfectionner une machine aussi utile, & pour déterminer plus exactement son effet, d'après les données & les calculs que nous venons d'indiquer.

Observations

Digitized by Google

Observations sur le mouvement des fluides élastiques.

328. Nous avons dit qu'au moment que le régulateur d'une machine à feu s'ouvre, la vapeur passe de la chaudière dans le cylindre, avec une vitesse prodigieuse : il est aisé de la déterminer, d'après les principes ordinaires, quoiqu'on ait lieu de remarquer qu'on s'est peu occupé jusqu'ici de l'écoulement des fluides rares & élastiques. Il faut observer d'abord que toute la pression du fluide élastique peut être évaluée par le poids d'une colonne de fluide incompressible ; & en second lieu, que si deux fluides, de densités différentes, s'écoulent par des orifices, en vertu de la pression causée par deux autres fluides incompressibles, en nommant D & d la densité des fluides qui coulent, V & v leurs vitesses, D′ & d' les densités des fluides qui les pressent, H & h la hauteur de ces fluides ; on aura $V : v :: \sqrt{\frac{D'H}{D}} : \sqrt{\frac{d'h}{d}}$; de sorte que quand le fluide comprimant, & celui qui coule sont de même densité, les vitesses sont comme les racines quarrées des hauteurs, quelle que soit d'ailleurs la densité de ces fluides. Ainsi du mercure & de l'eau, sous la même hauteur de charge, coulent avec des vitesses égales : mais il n'en est pas de même quand le fluide comprimant a une densité différente du fluide qui coule.

Digitized by Google

Fig. 32. 329. Soit le tuyau ABC, conſtamment plein juſqu'en A d'un fluide incompreſſible, qui ne peut s'écouler que par l'orifice *c* très-petit en comparaiſon de IK : en négligeant la contraction, & toute autre réſiſtance, la viteſſe en *c* ſera due à toute la hauteur AB : mais ſi la partie DEKI étoit remplie de mercure, le reſte du tuyau étant plein d'eau, & que les deux fluides fuſſent ſéparés par un plan vertical & mobile DE, on conçoit aiſément que le fluide qui doit s'écouler, ayant une denſité 14 fois auſſi grande que celle du fluide comprimant, la preſſion de celui-ci ne devroit être comptée que ſur le pied du $\frac{1}{14}$ de ſa hauteur. Ainſi une colonne d'eau de 32 pieds 8 pouces de hauteur, ne procureroit au mercure qu'une viteſſe due à 28 pouces, en négligeant la petite hauteur de mercure IC; & réciproquement, ſi la partie DEKI étoit remplie d'eau, & l'autre de mercure, il ſuffiroit de donner 28 pouces de hauteur à la colonne de mercure, pour imprimer à l'eau qui ſortiroit par l'orifice *c*, une viteſſe due à 32 pieds 8 pouces de hauteur.

330. Suppoſons à préſent que la partie FB ſoit pleine d'eau, ſur 32 pieds de hauteur, faiſant équilibre à la preſſion de l'atmoſphère; que l'extrémité AF ſoit exactement fermée & vide d'air, & que le bout IK ſoit adapté à un récipient parfaitement vide; la partie IDKE étant pleine d'air, & l'orifice *c* bouché, tout ſera en équilibre,

Digitized by Google

& le reſſort de l'air ſupportera la colonne de 32 pieds d'eau : mais dès qu'on débouchera l'orifice, l'air en ſortira avec une viteſſe due à 32 pieds de hauteur, multipliés par le rapport des denſités des deux fluides, que nous ſuppoſerons égal à 800. Ainſi cette viteſſe ſera égale à $\sqrt{2g \times 32 \times 800} =$ 1243 pieds par ſeconde, tandis que ſi le fluide qui s'écoule étoit de l'eau, la viteſſe ne ſeroit due qu'à 32 pieds de hauteur, & ſe borneroit à 44 pieds : or la colonne d'eau de 32 pieds d'élévation, que nous avons ſuppoſé charger l'air, fait la fonction du poids total de l'atmoſphère, s'il agiſſoit immédiatement. Ainſi nous pouvons conclure que quand l'air entre dans un récipient parfaitement vide, ſa viteſſe initiale eſt de 1243 pieds par ſeconde.

331. Nous avons vu que la vapeur formée dans la chaudière d'une machine à feu a un reſſort plus conſidérable que celui de l'air, & qui équivaut à-peu-près au poids d'une colonne d'eau de 38 pieds de hauteur. Or, dans cet état, ſi on ſuppoſe que la denſité de la vapeur ne ſoit que la quatorze millième de celle de l'eau (*), il s'enſuivra que quand le régulateur s'ouvre, & en ſuppoſant le vide parfait dans le cylindre, la

(*) L'eau réduite en vapeur occupant un volume 14000 fois plus grand, il s'enſuit que les molécules qui ſe touchent dans l'état primitif, ſont alors à une diſtance égale à 24 fois leur diamètre.

Digitized by Google

vapeur doit s'y introduire avec une viteſſe initiale égale à $\sqrt{2g \times 38 \times 14000}$, ou à 5665 pieds par ſeconde.

332. En général, on peut comparer le reſſort d'un fluide élaſtique au poids d'une colonne d'un fluide incompreſſible, tel que l'eau; & ſi on nomme h la hauteur de cette colonne, d le rapport de la denſité de l'eau à celle du fluide élaſtique, & V la viteſſe que doit prendre ce dernier, on aura $V = \sqrt{2ghd}$. On pourra tenir compte de la contraction, ſi les fluides élaſtiques en éprouvent de ſemblables à celle de l'eau.

Si un vaſe, plein d'un fluide élaſtique, ſe vidoit par un orifice, dans un eſpace vide & indéfini, la viteſſe initiale de l'écoulement n'éprouveroit point de diminution, & elle demeureroit conſtante pendant la durée de l'écoulement, parce que le reſſort du fluide, repréſenté par la hauteur variable d'un fluide incompreſſible, reſteroit toujours proportionnel à la denſité du fluide qui s'écoule.

Mais ſi le fluide élaſtique entroit dans un récipient fini, parfaitement vide, au commencement du mouvement la viteſſe initiale ſeroit d'abord due à tout le reſſort du fluide; mais elle diminueroit enſuite, à meſure que la denſité intérieure augmenteroit; & le mouvement ceſſeroit quand le fluide intérieur auroit acquis la même denſité que l'extérieur. Ce mouvement ſe rap-

Digitized by Google

porte exactement à celui de l'eau qui coule dans un vase qu'elle tend à remplir.

Enfin, si l'air, ou un autre fluide élastique, s'introduit dans un récipient d'une capacité variable, par exemple, dans un corps de pompe dont le piston se meut avec une vitesse uniforme, la densité intérieure parviendra bientôt à l'uniformité, & se réglera de telle manière que la différence des deux ressorts puisse introduire assez de fluide, pour occuper constamment l'augmentation de la capacité.

333. La Physique s'enrichira sans doute de quantité d'expériences curieuses sur le mouvement des fluides; sur-tout dans un tems où on vient de découvrir tant d'espèces de fluides élastiques, dont il est intéressant de connoître toutes les propriétés. Mais nous bornerons ici nos réflexions à cet égard, parce que l'utilité de ces decouvertes intéresse moins l'Hydraulique, dont nous nous occupons principalement.

Fin de la première Partie.

Digitized by Google

BODLEIANA

Digitized by Google

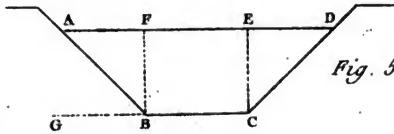


Fig. 5.

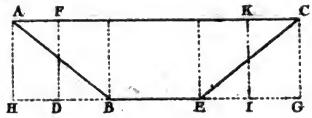


Fig. 6.

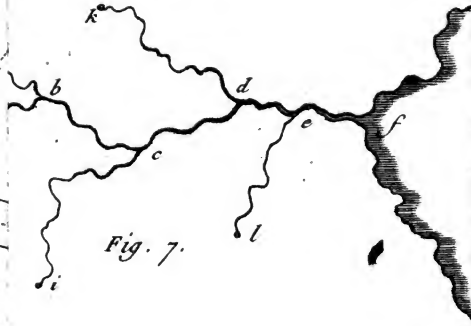
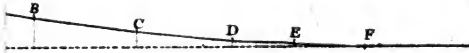


Fig. 7.



Digitized by Google

Digitized by Google

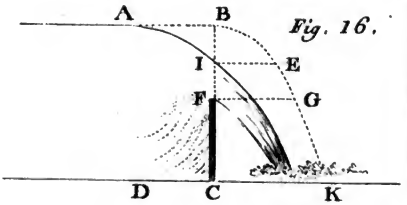


Fig. 16.

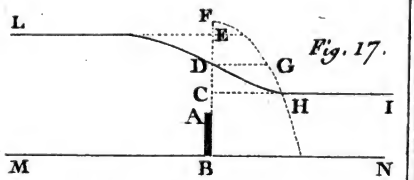


Fig. 17.

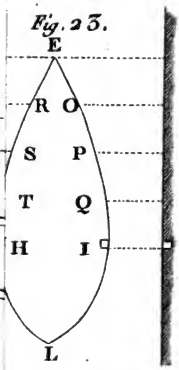


Fig. 23.

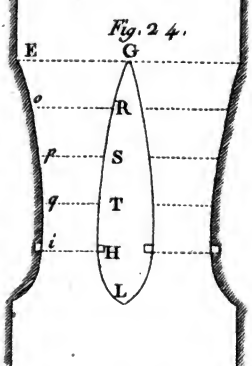


Fig. 24.

Digitized by Google

Digitized by Google

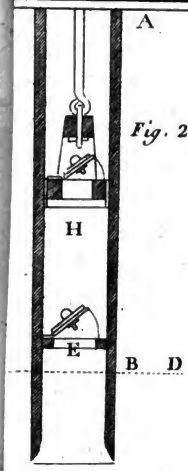


Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

Fig. 29.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google